Stanislas | Devoir Surveillé | MPSI 1

DS n°6 | 4h | 04 février 2012

■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

* * *

Dans ce problème, on cherche à approcher des fonctions définies sur un segment par des fonctions polynomiales. On s'intéresse dans un premier temps aux polynômes d'interpolation de Lagrange, puis aux polynômes de Bernstein.

Soient a, b deux réels tels que $a < b$ et f une application de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{P}ol([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[a,b]$.

Pour toute fonction continue $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, on note $\|g\|_\infty = \max\limits_{x\in[a,b]} |g(x)|$.

1. Montrer que cette quantité est bien définie.

Polynôme d'interpolation de Lagrange

Soient n un entier naturel et $(x_0,\ldots,x_n) \in [a,b]^{n+1}$ des réels deux à deux distincts. On note,

$$\forall\, x \in [a,b], q_n(x) = \prod_{j=0}^{n}(x-x_j).$$

2. Montrer qu'il existe une constante $M_0 \in \mathbb{R}$ (indépendante des $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$) telle que $\|q_n\|_\infty \leq M_0^{n+1}$.

Pour tout entier $i \in [\![0,n]\!]$, on note $L_i : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \prod\limits_{j\in[\![0,n]\!],\, j\neq i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$.

3 . a) Pour tout entier $i \in [\![0,n]\!]$, déterminer le degré du polynôme L_i.

b) Pour tous entiers i, $j \in [\![0,n]\!]$, déterminer $L_i(x_j)$.

4 . a) Montrer que $\mathscr{P}ol([a,b],\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

b) On note $\pi : \mathscr{P}ol([a,b],\mathbb{R}) \to \mathscr{P}ol([a,b],\mathbb{R})$, $p \mapsto \sum\limits_{i=0}^{n} p(x_i)L_i$. Montrer que π est un projecteur.

5. Démontrer qu'il existe un polynôme P_n de degré au plus n tel que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $P_n(x_i) = f(x_i)$.

On admettra que ce polynôme est unique. Il sera appelé polynôme d'interpolation de Lagrange.

Un exemple de convergence uniforme des polynômes d'interpolation de Lagrange

On suppose dans cette partie que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a,b]$ et que toutes les dérivées de f sont majorées, sur $[a,b]$, par une même constante M.

6. Soit $x \in [a,b]\backslash\{x_0,\ldots,x_n\}$. On note φ la fonction définie par

$$\forall\, u \in [a,b],\ \varphi(u) = f(u) - P_n(u) - \frac{f(x)-P_n(x)}{q_n(x)}q_n(u).$$

En utilisant (proprement) le théorème de Rolle, montrer qu'il existe un réel $v \in [a,b]$ tel que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(v)}{(n+1)!}q_n(x).$$

7. En déduire que la suite $(\|P_n - f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Un exemple de divergence

Dans cette partie, on pose $a = -1$, $b = 1$, $f\ :\ x \mapsto |x|$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ i \in [\![0, n]\!]$, $x_i = -1+\frac{2i}{n+1}$.
8. Soient p, q deux entiers naturels tels que $0 \leq p < q$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{q}{k}\frac{q-2k-1}{k+1} = 1 + (-1)^p\binom{q-1}{p}\frac{q-2p-2}{p+1}.$$

9 . a) Soit $m = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. On pose

$$A(n) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{n-2k-1}{k+1}$$
$$B(n) = \sum_{k=m+1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{n-2k-1}{k+1}.$$

b) Calculer $A(n) + B(n)$.
c) Montrer que $P_n(1) = A(n) - B(n)$.
d) En déduire que $P_n(1) = 1 + 2(-1)^m\binom{n-1}{m}\frac{n-2m-2}{m+1}$.
10. En admettant que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, donner un équivalent de $|f(1) - P_{2n+1}(1)|$ lorsque n tend vers l'infini.
11. En déduire que $(\|P_n - f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

Construction d'une suite de polynômes

Dans cette partie, on note $a = -1$, $b = 1$, $f\ :\ x \mapsto |x|$. Soit $g\ :\ [0, 1] \to [0, 1]$, $x \mapsto \sqrt{x}$. On définit par récurrence la suite de fonctions polynomiales (Q_n) en posant

$$Q_0 = 0 \text{ et } \forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in [0, 1],\ Q_{n+1}(x) = Q_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - Q_n^2(x)\right).$$

12 . a) En remarquant que

$$\forall\ x \in [0, 1],\ \sqrt{x} - Q_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - Q_n(x))\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + Q_n(x))\right),$$

montrer par récurrence que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ x \in [0, 1]$, $0 \leq \sqrt{x} - Q_n(x) \leq \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$.
b) En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$, la suite $(Q_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{x}$.
c) En étudiant les variations sur $[0, 1]$ de la fonction $t \mapsto t\left(1 - \frac{t}{2}\right)^n$, montrer que $(\|g - Q_n\|_\infty)$ converge vers 0.
13. À l'aide des questions précédentes, en déduire qu'il existe une suite de polynômes (R_n) telle que $(\|R_n - f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Polynômes de Bernstein et fonctions continues

On définit les polynômes de Bernstein par $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ k \in [\![0, n]\!]$, $P_{n,k}(x) = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$.
Pour toute fonction f définie sur $[0, 1]$, le polynôme d'approximation de Bernstein d'indice n de f est

$$B_n(f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)P_{n,k}.$$

On suppose que la fonction f est continue sur $[0,1]$. On pose $M = \|f\|_\infty$.

14 . a) Soit $n \geq 2$. Déterminer $B_n(f_i)$, où $f_i \ :\ x \mapsto x^i$ pour $i \in \{0,1,2\}$.

b) En déduire que $\sum\limits_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^2 P_{n,k}(x) = \frac{x(1-x)}{n}$, pour $x \in [0,1]$.

Soit $x \in [0,1]$ et $\varepsilon > 0$.

15. Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in [0,1]$, si $|x-t| \leq \alpha$, alors $|f(x)-f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

On considère les ensembles $\mathscr{E}_1 = \{k \in [\![0,n]\!] \ ;\ |\frac{k}{n} - x| < \alpha\}$ et $\mathscr{E}_n = \{k \in [\![0,n]\!] \ ;\ |\frac{k}{n} - x| \geq \alpha$ ainsi que les deux sommes

$$S_1 = \sum_{k \in \mathscr{E}_1} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| P_{n,k}(x)$$
$$S_2 = \sum_{k \in \mathscr{E}_2} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| P_{n,k}(x).$$

16 . a) Montrer que $S_2 \leq \frac{M}{2n\alpha^2}$ et $S_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

b) En déduire que $(\|B_n(f) - f\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.