STANISLAS — Devoir Surveillé — **MPSI 1**

DS n°7 — 4h

■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

* * *

Étant donné un nombre entier naturel non nul n et un ensemble E à n éléments, on appelle involution de E toute bijection f de E sur lui-même telle que $f \circ f = \mathrm{Id}$, où Id désigne l'application identique de E. L'objectif du problème est l'étude du nombre T_n d'involutions de $[\![1, n]\!]$ et, en particulier, la recherche d'un équivalent du nombre T_n quand n tend vers $+\infty$.

Partie I : Étude du nombre T_n d'involutions de E

1. Calculer T_1, T_2 et T_3.

2. On suppose désormais $n \geq 3$.

a) Déterminer en fonction de T_i, où $1 \leq i < n$:

* le nombre I_n d'involutions s de $[\![1, n]\!]$ telles que $s(n) = n$.
* le nombre I_k d'involutions s de $[\![1, n]\!]$ telles que $s(n) = k$, où k est un nombre entier donné de $[\![1, n-1]\!]$.

b) En déduire la relation suivante :

$$T_n = T_{n-1} + (n-1)T_{n-2}.$$

3. Rédiger en `Python` un algorithme `n_inv` permettant le calcul des p premiers termes de la suite (T_n) pour un nombre entier donné $p \geq 3$.

Partie II : Interprétation de T_n à l'aide d'une suite de polynômes

On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$u(x) = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par $u^{(n)}$ la dérivée $n$ème de u. On note H_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par la relation

$$u^{(n)}(x) = H_n(x)u(x).$$

4 . a) Exprimer $u'(x)$ en fonction de $u(x)$ et x.
En déduire la relation suivante, pour tout nombre entier $n \geq 2$:

$$u^{(n)}(x) = xu^{(n-1)}(x) + (n-1)u^{(n-2)}(x).$$

b) Calculer H_0 et H_1, puis déduire des relations précédentes l'expression de $H_n(x)$ en fonction de $H_{n-1}(x)$, $H_{n-2}(x)$ et x.

c) Prouver que H_n est un polynôme dont on précisera, en fonction de n, le degré, la parité et le signe sur $[0, +\infty[$.

d) Comparer T_n et $H_n(1)$.

5 . a) Établir que pour tout nombre entier naturel non nul n,

$$H_n'(x) = nH_{n-1}(x).$$

b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer $H_n(0)$ et $H_n'(0)$ en fonction de n. (On distinguera deux cas suivant la parité de n.)

6 . a) Établir que, pour tout nombre entier naturel n :

$$H_n''(x) + xH_n'(x) - nH_n(x) = 0$$

b) Dans toute la suite du problème, pour tout nombre entier naturel n, on note v_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$v_n(x) = H_n(x)e^{\frac{x^2}{4}}.$$

Étudier le signe de v_n et de v_n' sur $[0, +\infty[$. Calculer $v_n(0)$ et $v_n'(0)$.

c) Exprimer $v_n''(x)$ en fonction de $v_n(x)$ et x.

d) En déduire la relation suivante, pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre réel x appartenant à $[0, 1]$:

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) v_n(x) \leq v_n''(x) \leq \left(n + \frac{3}{4}\right) v_n(x).$$

Dans toute la suite du problème, on posera $\alpha_n = \sqrt{n + \frac{1}{2}}$ et $\beta_n = \sqrt{n + \frac{3}{4}}$.

Partie III : Recherche d'un équivalent de T_n

On étudie tout d'abord un équivalent de T_n lorsque l'entier $n = 2p$ est pair.

7. On établit dans cette question un résultat préliminaire permettant d'encadrer une fonction numérique définie sur $[0, 1]$ à valeurs strictement positives, de classe $\mathscr{C}^2$ et satisfaisant aux relations :

$$\alpha^2 f(x) \leq f''(x) \leq \beta^2 f(x) \qquad f(0) = a \qquad f'(0) = 0,$$

où a, α et β sont des nombres réels strictement positifs donnés.

a) Déterminer des nombres réels λ et μ tels que la fonction numérique φ définie sur $[0, 1]$ par la relation

$$\varphi(x) = \lambda e^{\beta x} + \mu e^{-\beta x}$$

vérifie $\varphi(0) = a$ et $\varphi'(0) = 0$.
Indiquer alors le signe de φ sur $[0, 1]$ et exprimer $\varphi''(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.

b) Soit w la fonction numérique définie sur $[0, 1]$ par la relation

$$w = f\varphi' - \varphi f'.$$

Calculer $w(0)$. Étudier le signe de w', puis celui de w.

c) En déduire, pour tout nombre réel x appartenant à $[0, 1]$, l'inégalité $f(x) \leq \varphi(x)$.

d) Établir, pour tout nombre réel x appartenant à $[0, 1]$, l'inégalité suivante :

$$f(x) \leq \frac{a}{2}\left(e^{\beta x} + 1\right).$$

e) Établir de même que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0, 1]$:

$$\frac{a}{2}e^{\alpha x} \leq f(x).$$

8 . a) À l'aide des relations précédentes, établir que, pour tout nombre entier naturel p :

$$H_{2p}(0)\frac{e^{\alpha_{2p}}}{2} \leq e^{\frac{1}{4}} H_{2p}(1) \leq H_{2p}(0)\frac{e^{\beta_{2p}}+1}{2}.$$

b) On admet la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. D'après la partie II, $H_{2p}(0) = \frac{(2p)!}{2^p p!}$. En déduire que, pour $n = 2p$, on a

$$T_n \sim \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{4}} e^{\sqrt{n}} \left(\frac{n}{e}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

On étudie enfin un équivalent de T_n lorsque l'entier n est impair ($n = 2p+1$).

9. On établit par des méthodes analogues à celles de la question III.1. que, si g est une fonction numérique définie sur $[0,1]$ à valeurs strictement positives sur $]0,1]$ de classe $\mathscr{C}^2$ et satisfaisant aux relations

$$\alpha^2 g(x) \leq g''(x) \leq \beta^2 g(x) \qquad g(0) = 0 \qquad g'(0) = a$$

où a, α et β sont des nombres réels strictement positifs donnés, alors, pour tout nombre réel x appartenant à $[0,1]$:

$$\frac{a}{2\alpha}\left(e^{\alpha x} - 1\right) \leq g(x) \leq \frac{a}{2\beta} e^{\beta x}.$$

(On ne demande pas de justifier cet encadrement).

En déduire que pour $n = 2p+1$,

$$H_n(1) \sim \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{4}} \sqrt{n} e^{\sqrt{n}} H_{n-1}(0).$$

10. En déduire un équivalent de T_n lorsque n tend vers $+\infty$.