STANISLAS — Devoir Surveillé — **MPSI 1**

DS n°8 — 4h — 31 mars 2012

■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

* * *

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère l'application linéaire

$$f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (ax, -x + ay - z, -y + az).$$

On pose $S = \{-1, 0, 1\}$.
1. Déterminer, pour tout $a \in S$, une base $\mathscr{B}_a$ de $\operatorname{Ker} f_a$.
2. Montrer que $\mathscr{B} = \bigcup\limits_{a \in S} \mathscr{B}_a$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Pour tout réel a, déterminer la matrice de f_a dans la base $\mathscr{B}$.
4. Montrer que f_a est bijective si et seulement si $a \notin S$.

Problème. (Matrices magiques) Dans tout le problème, la lettre n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Pour tous nombres relatifs p, q, on note $[\![p, q]\!] = \{m \in \mathbb{Z}\ ;\ p \leq m \leq q\}$.

On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Pour tout couple (k, ℓ) appartenant à $[\![1, n]\!]^2$, E_{kl} désigne la matrice appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont le coefficient situé sur la k-ème ligne et la ℓ-ème colonne vaut 1 et dont tous les autres coefficients sont nuls. On rappelle que $(E_{k\ell})_{(k,\ell)\in[\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout réel K, on définit les ensembles

* $L_K = \{M = (m_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \sum\limits_{j=1}^{n} m_{ij} = K\}$.

* $L = \bigcup\limits_{K \in \mathbb{R}} L_K$.

* $C_K = \{M = (m_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ \forall\, j \in [\![1, n]\!],\ \sum\limits_{i=1}^{n} m_{ij} = K\}$.

* $C = \bigcup\limits_{K \in \mathbb{R}} C_K$.

Une matrice $M = (m_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite matrice **magique** d'ordre n lorsqu'elle vérifie les deux propriétés suivantes :

(P_1) $\{m_{ij},\ (i, j) \in [\![1, n]\!]^2\} = [\![1, n^2]\!]$.

(P_2) $\exists\ K \in \mathbb{R}\ ;\ M \in L_K \cap C_K$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} m_{kk} = \sum\limits_{k=1}^{n} m_{k,n+1-k} = K$.

Les parties du problème peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Questions Préliminaires

1. Montrer que, si M est une matrice magique d'ordre n, le réel K dont la propriété (P_2) affirme l'existence vaut $\frac{n(n^2+1)}{2}$. On notera cet entier K_n.
2. Montrer qu'il n'existe pas de matrice magique d'ordre 2.

Partie I : Étude de l'espace vectoriel $L \cap C$

3 . a) Montrer que L_0 est un espace vectoriel et qu'il est engendré par la famille de matrices $(E_{ij} - E_{in})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n-1]\!]}$.

b) Déterminer la dimension de L_0.

c) Soit K un réel. Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, M appartient à L_K si et seulement si $M - KI_n$ appartient à L_0.

d) Montrer que $L = \mathrm{Vect}\{I_n\} \oplus L_0$ puis en déduire la dimension de L.

4 . a) Montrer que, pour toute matrice $M = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n-1} m_{ij}(E_{ij} - E_{in}) \in L_0$, M appartient à C_0 si et seulement si, pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 0$.

b) En déduire une base et la dimension de $L_0 \cap C_0$ (après avoir justifié que $L_0 \cap C_0$ est un espace vectoriel).

5 . a) Montrer que, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, M appartient à $L \cap C$ si et seulement s'il existe un réel K tel que M appartienne à $L_K \cap C_K$. Cette constante K sera appelée *nombre magique* associé à M.

b) En déduire la dimension de l'espace $L \cap C$.

6. Montrer que toute matrice appartenant $L \cap C$ se décompose de manière unique comme somme de deux matrices de $L \cap C$ dont l'une est symétrique et l'autre est antisymétrique.

7. On note $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont des 1.

a) Montrer que $M \in L \cap C$ si et seulement s'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $MJ = JM = \lambda J$.

b) Soit M une matrice inversible appartenant à $L \cap C$. Montrer que $M^{-1} \in L \cap C$. En déduire l'expression du nombre magique de M^{-1} en fonction de celui de M.

Partie II : Étude d'un groupe associé à certaines permutations de $[\![1, n]\!]$

Étant donnée une permutation σ de $[\![1, n]\!]$, on note A_σ la matrice $(a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant, pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{ij} = \delta_{\sigma(i),j}$, ce symbole (dit de Kronecker) étant défini par la relation $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon. On note $\mathscr{S} = \{A_\sigma, \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$.

8. Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $M = (m_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Expliciter le coefficient général de la matrice $A_\sigma M$, puis celui de la matrice MA_σ.

9. Montrer que $(\mathscr{S}, \times)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ où $\times$ désigne le produit matriciel.

10 . a) Soit $K \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout matrice $M \in L_K \cap C_K$ et toutes permutations σ, $\sigma' \in \mathfrak{S}_n$, $A_\sigma M A_{\sigma'}$ appartient à $L_K \cap C_K$.

b) On note $\mathscr{I}_n$ l'ensemble des permutations σ de $[\![1, n]\!]$ telles que

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!],\ \sigma(n + 1 - k) = n + 1 - \sigma(k).$$

Soit $\sigma \in \mathscr{I}_n$. Montrer que, si M est une matrice magique de taille n, alors $A_\sigma M A_{\sigma^{-1}}$ en est aussi une.

11. On note $\mathscr{I} = \{A_\sigma, \sigma \in \mathscr{I}_n\}$.

a) Montrer que $(\mathscr{I}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathscr{S}, \times)$.

b) Déterminer le cardinal de $\mathscr{I}$.