

Par exemple, si $P = 1 + 2X + 3X^2$ et $Q = 4 + 5X + 6X^2 + 7X^3$,

$$\text{Res}(P, Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

La matrice servant à définir $\text{Res}(P, Q)$ pourra être notée $M_{P,Q}$:

$$\text{Res}(P, Q) = \det M_{P,Q}.$$

On note $E = \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ et $F = \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$. Soit u l'application de E vers F définie pour tout $(A, B) \in E$ par $u(A, B) = PA + QB$.

1. Exprimer $\text{Res}(P, Q)$ en fonction de $\text{Res}(Q, P)$.

2. Cas où u est bijective.

a) Démontrer que u est une application linéaire.

b) Si on suppose que u est bijective, démontrer que P et Q sont premiers entre eux.

c) Si on suppose que P et Q sont premiers entre eux, déterminer $\text{Ker } u$ et en déduire que u est bijective.

3. Matrice de u .

On note $\mathcal{B} = ((1, 0), (X, 0), \dots, (X^{q-1}, 0), (0, 1), (0, X), \dots, (0, X^{p-1}))$ une base de E et $\mathcal{B}' = (1, X, \dots, X^{p+q-1})$ la base canonique de F .

a) Déterminer la matrice de u par rapport aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' .

b) Démontrer que $\text{Res}(P, Q) \neq 0$ si et seulement si P et Q sont premiers entre eux.

4. Racine multiple.

a) Démontrer qu'un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine multiple dans \mathbb{C} si et seulement si $\text{Res}(P, P') = 0$.

b) *Application.* Soient a, b deux nombres complexes. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que le polynôme $X^3 + aX + b$ admette une racine multiple dans \mathbb{C} .

Applications

5. Équation de Bézout.

Dans cette question, on note $P = X^4 + X^3 + 1$ et $Q = X^3 - X + 1$.

a) Démontrer, en utilisant la première partie, que les polynômes P et Q sont premiers entre eux.

b) On cherche un couple (A_0, B_0) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tel que $PA_0 + QB_0 = 1$. Expliquer comment on peut trouver un tel couple en utilisant la matrice de u , puis donner un couple solution.

c) Déterminer tous les couples (A, B) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $PA + BQ = 1$.

6. Équation de courbe.

On identifiera dans cette question polynômes et fonctions polynomiales.

a) On considère la courbe Γ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{t^2+1} \\ y(t) = \frac{3t}{t^4+1} \end{cases}, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Étudier et construire la courbe Γ , on précisera les branches infinies. On pourra prendre $\sqrt{3} \approx 1,7$ et $3^{-1/4} \approx 0,8$.

b) Soient A, B, C, D des polynômes à coefficients réels. Pour tout $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$, on pose $P(t) = B(t)x - A(t)$ et $Q(t) = D(t)y - C(t)$. Établir qu'un point M de coordonnées (x, y) appartient à la courbe de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = \frac{A(t)}{B(t)} \\ y(t) = \frac{C(t)}{D(t)} \end{cases}, \forall t \in \mathbb{R}$$

si et seulement si les polynômes P et Q ont une racine commune.

c) En déduire une équation cartésienne de la courbe Γ .

7. Nombre algébrique.

En utilisant les polynômes $P(X) = X^2 - 3$ et $Q_y(X) = (y - X)^2 - 7$, déterminer un polynôme à coefficients entiers de degré 4 ayant comme racine $\sqrt{3} + \sqrt{7}$. Quelles sont les autres racines de ce polynôme ?