STANISLAS | Devoir Surveillé | **MPSI 1**
DS n°10 | 4h | 16 juin 2012

■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

* * *

Exercice 1. Soit la fonction $v\ :\ [0,10]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, solution de l'équation suivante :

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)+\max_{a\in\mathbb{R}}\left[-(x-a)\frac{\partial v}{\partial x}(t,x+a)-2a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x)\right]=0,\ \forall\ (t,x)\in[0,10]\times\mathbb{R},$$

$$v(10,x)=x^2-x,\ \forall\ x\in\mathbb{R}.$$

On cherche une solution de la forme

$$v(t,x)=\gamma(t)x^2+\varphi(t)x+\rho(t),$$

où $\gamma\ :\ [0,10]\to\mathbb{R}_+^\star$ et $\varphi,\ \rho\ :\ [0,10]\to\mathbb{R}$ sont des fonctions dérivables à déterminer.
1. Calculer $\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(t,x)$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x)$ en fonction de x et des fonctions γ, φ et ρ.
2. En utilisant les conditions aux limites, trouver les conditions terminales $\gamma(10)$, $\varphi(10)$ et $\rho(10)$.
3. Réécrire l'équation satisfaite par v.
4. Déterminer les équations aux dérivées partielles satisfaites par γ et φ.
5. En déduire une fonction v.

Problème. Ce problème est consitué d'une série de trois QCM indépendants. Chaque question du QCM comporte au plus deux réponses exactes. Pour chacune des questions, vous cocherez, sur le document réponse, les réponses qui vous semblent exactes. Si vous jugez qu'aucune des réponses **a)**, **b)**, **c)**, **d)** n'est correcte, vous devez cocher la case **e)**. Si aucune des cases n'est cochée, cela signifie que vous n'avez pas répondu à la question. **Les réponses fausses seront pénalisées.**

Partie I

Dans l'espace vectoriel E des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$, on considère l'ensemble F des fonctions de la forme $af_1+bf_2+cf_3$, où a, b, c sont des réels et f_1, f_2, f_3 désignent les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x)=e^x$, $f_2(x)=e^{-x/2}\sin(x\sqrt{3}/2)$ et $f_3(x)=e^{-x/2}\cos(x\sqrt{3}/2)$. On note D l'application qui à tout élément f de E associe la dérivée f' de f. On désigne par $\circ$ la loi de composition des applications.

1. L'ensemble F
- **a)** est un sous-espace vectoriel de E.
- **b)** n'est pas un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
- **c)** est un groupe pour la loi de multiplication des fonctions.
- **d)** est un sous-anneau de E.

2. L'application D
- **a)** est un endomorphisme de E.
- **b)** n'est pas un endomorphisme de E.

c) est une application linéaire sur E.
d) n'est pas une application linéaire.

3. On note $\operatorname{Ker} D$ le noyau de D et $\operatorname{Im} D$ l'image de D. On établit que
a) $\operatorname{Ker} D = E$.
b) $\operatorname{Im} D$ est l'ensemble des fonctions constantes.
c) $\operatorname{Im} D$ est l'ensemble E privé de la fonction nulle.
d) $\operatorname{Ker} D$ est réduit à la fonction nulle.

4. L'application D
a) est surjective car $\operatorname{Im} D = E$ puisque toute fonction continue admet des primitives.
b) est bijective car $\operatorname{Im} D = E$ et il y a équivalence entre f bijective et f surjective.
c) n'est pas surjective car $\operatorname{Ker} D$ n'est pas réduit à la fonction nulle.
d) n'est pas injective.

5. a, b, c étant des réels, le développement limité de la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ au voisinage de 0 à l'ordre 2 s'écrit
a) $(a+c) + (a + (b\sqrt{3}/2) - (c/2))t + o(t^2)$.
b) $(a+c) + (a + (b\sqrt{3}/2) - (c/2))t + ((a/2) - (b\sqrt{3}/4) - (c/4))t^2 + o(t^2)$.
c) $(a+c) + (a + (b\sqrt{3}/2) - (c/2))t + ((a/2) - (b\sqrt{3}/4) - (c/4))t^2 + o(t^3)$.
d) $(a+c) + (a + (b\sqrt{3}/2) - (c/2))t + ((a/2) - (b\sqrt{3}/4) - (c/2))t^2 + o(t^2)$.

6. La famille $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$
a) est, d'après la question **5.**, une famille libre de F.
b) est, d'après la question **5.**, une famille liée de F.
c) est une base de F.
d) ne peut être une base de F.

7. L'application D
a) ne peut pas induire un endomorphisme sur F car F n'est pas stable par D.
b) induit un endomorphisme sur F car F est stable par D.
c) a pour matrice dans une base donnée de E, une matrice carrée d'ordre 3.
d) ne peut induire un endomorphisme sur F car elle n'est pas linéaire.

8. On note M la matrice, dans $\mathscr{B}$, de la restriction D_F de l'application D sur F, si elle existe. M est
a) une matrice d'ordre 3 symétrique réelle.
b) une matrice d'ordre 3 qui n'est ni symétrique ni antisymétrique.
c) définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.
d) définie par $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

9. La matrice M
a) n'est pas inversible car son déterminant est nul.
b) est inversible et a pour inverse M^2 car $M^3 = I$, où I désigne la matrice unité dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3.
c) est inversible car son déterminant est égal à 1.
d) est inversible et a pour rang 2.

10. L'application D_F

a) n'est pas bijective.

b) est un automorphisme de F.

c) ne peut être un automorphisme de F car D n'est pas bijective.

d) a pour réciproque l'applcation $D_F^2 = D_F \circ D_F$.

On considère l'application φ qui à deux éléments g et h de F associe le réel $\varphi(g,h) = g(0)h(0) + g'(0)h'(0) + g''(0)h''(0)$ où g' et g'' désignent les dérivées première et seconde de la fonction g et h' et h'' les dérivées première et seconde de la fonction h.

11. L'application φ

a) (étendue à tous les couples de E) est un produit scalaire sur E.

b) n'est pas un produit scalaire sur F car elle n'est pas définie positive.

c) est bilinéaire, symétrique, définie positive et F est un espace vectoriel euclidien.

d) n'est pas bilinéaire.

12. La famille $\mathscr{B}$ définie dans la question **6.**

a) n'est pas orthogonale pour φ car $\varphi(f_1, f_1) = 3$.

b) est orthogonale pour φ car $\varphi(f_1, f_2) = \varphi(f_1, f_3) = \varphi(f_2, f_3) = 0$.

c) est une base orthonormée de F muni du produit scalaire φ.

d) n'est pas une base orthonormée de F.

On considère l'équation différentielle $y''' = y$ que l'on notera (E). Une solution sur $\mathbb{R}$ de (E) est une fonction f, définie et trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f'''(x) = f(x)$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, f''' désignant la dérivée d'ordre 3 de la fonction f.

13. Soit f une solution de (E).

a) f est nécessairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b) f n'est pas nécessairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

c) si f est une fonction polynomiale, alors elle est nulle car $\deg(f''') \leq \deg(f) - 3$.

d) f peut être une fonction polynôme distincte de la fonction nulle.

On considère T l'application $D^3 - \mathrm{Id}$, où Id désigne l'application identité de E et $D^3 = D \circ D \circ D$. On note $\mathrm{Ker}\, T$ le noyau de l'application T.

14. On montre que

a) $\mathrm{Ker}\, T$ est l'ensemble des solutions polynomiales de (E).

b) $\mathrm{Ker}\, T$ est réduit à la fonction nulle.

c) F est inclus dans $\mathrm{Ker}\, T$.

d) $\mathrm{Ker}\, T$ ne contient pas F.

15. Soit f une solution de (E) et g la fonction définie par $f'' + f' + f$. On établit que

a) $g = \lambda / f_1$, où λ est un réel, car g est solution de l'équation différentielle $y' = -y$.

b) $g = \lambda f_1$, où λ est un réel, car g est solution de l'équation différentielle $y' = y$.

c) $g = \lambda / f_1$, où λ est un réel, car g est une solution de l'équation différentielle $y' = y$.

d) $g = \lambda f_1$, où λ est un réel, car g est solution de l'équation différentielle $y' = -y$.

16. On considère $(\mathscr{S}_k)$ l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$. On montre que

a) les solutions à valeurs complexes de $(\mathscr{S}_k)$ sont les fonctions de la forme $\lambda e^{(1+i\sqrt{3})t/2} + \mu e^{(1-i\sqrt{3})t/2}$ où λ et μ sont des complexes arbitraires.

b) les solutions à valeurs complexes de $(\mathscr{S}_k)$ sont les fonctions de la forme $\lambda e^{(-1-i\sqrt{3})t/2} + \mu e^{(-1+i\sqrt{3})t/2}$ où λ et μ sont des complexes arbitraires.

c) l'ensemble des solutions de $(\mathscr{S}_k)$ est un espace vectoriel de dimension 2 dont une base est la famille (f_2, f_3).
d) l'ensemble des solutions de $(\mathscr{S}_k)$ est un espace vectoriel de dimension 1.

17. On considère $(\mathscr{S})$ l'équation différentielle $y''(t) + y'(t) + y(t) = \lambda e^t$, où λ est un réel donné. On montre que
a) les solutions de $(\mathscr{S})$ sont les fonctions de la forme $\lambda e^t + \alpha f_2(t) + \beta f_3(t)$ où α et β sont des réels arbitraires.
b) les solutions de $(\mathscr{S})$ sont les fonctions de la forme $(\lambda/2) f_1(t) + \alpha f_2(t) + \beta f_3(t)$ où α et β sont des réels arbitraires.
c) $\operatorname{Ker} T$ et F sont deux ensembles distincts.
d) $\operatorname{Ker} T = F$.

Partie II

Soient a et b deux réels strictement positifs fixés tels que $b \leq a$. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ pour tout entier naturel n et $a_0 = a$, $b_0 = b$.

18. Les suites (a_n) et (b_n) vérifient
a) $0 < b_n \leq a_n$ pour tout n entier naturel.
b) $0 < a_n \leq b_n$ pour tout n entier naturel.
c) $a_{n+1} - a_n = (b_n - a_n)/2$ et $b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n}(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})$ pour tout n entier naturel.
d) $a_{n+1} - a_n = (a_n - b_n)/2$ et $b_{n+1} - b_n = \sqrt{b_n}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})$ pour tout n entier naturel.

19. La suite
a) (a_n) est croissante et majorée par b.
b) (a_n) est décroissante et minorée par a.
c) (b_n) est décroissante et minorée par a.
d) (b_n) est croissante et majorée par b.

20. Les suites (a_n) et (b_n)
a) ne sont pas adjacentes mais elles sont convergentes.
b) sont adjacentes.
c) ne peuvent être adjacentes car elles ne convergent pas vers la même limite.
d) ne sont pas toutes convergentes.

21. On établit que pour tout entier naturel n
a) $(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2/2 \leq a_{n+1} - b_{n+1} \leq (\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_{n+1}})^2$.
b) $(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_{n+1}})^2/2 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2$.
c) $(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_{n+1}})^2 \leq a_{n+1} - b_{n+1} \leq (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2/2$.
d) $(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{b_{n+1}})^2 \leq b_{n+1} - a_{n+1} \leq (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2/2$.

22. On pose, pour tout n entier naturel, $d_n = \sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}$. On montre que, pour tout n entier naturel
a) $(1/2)^n(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \leq d_n$.
b) $(1/\sqrt{2})^n(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \leq d_n$.
c) $d_n \leq (-1/\sqrt{2})^n(\sqrt{a} - \sqrt{b})$.
d) $d_n \leq (1/\sqrt{2})^n(\sqrt{b} - \sqrt{a})$.

23. On montre que, pour tout n entier naturel

a) $a_n \leq (1/\sqrt{2})^n(\sqrt{a}-\sqrt{b})2\sqrt{a} + \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

b) $b_n \leq (1/\sqrt{2})^n(\sqrt{a}-\sqrt{b})2\sqrt{a} + \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

c) $(1/\sqrt{2})^n(\sqrt{a}-\sqrt{b})2\sqrt{a} + \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \leq b_n$.

d) $a_n \leq (1/\sqrt{2})^n(\sqrt{b}-\sqrt{a})2\sqrt{a} + \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Partie III

On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(t) = \arctan(t)/t$ pour tout réel t différent de 0 et $f(0) = \ell$, où ℓ est un réel fixé, arctan désignant la fonction circulaire de la fonction tan. $|\cdot|$ désigne la fonction valeur absolue et f' désigne la dérivée de la fonction f.

24. La fonction f

a) est continue sur $\mathbb{R}$ pour toute valeur du réel ℓ.

b) est continue sur $\mathbb{R}$ pour $\ell = 1$ et seulement pour cette valeur de ℓ.

c) n'est continue sur $\mathbb{R}$ pour aucun réel ℓ.

d) est continue sur $\mathbb{R}$ pour $\ell = -1$.

Dans toute la suite de cette partie, on suppose que ℓ est un réel tel que la fonction f soit continue en 0, si cela est possible. On note $\mathbb{R}^\star$ l'ensemble des nombres réels non nuls.

25. La fonction f

a) n'est pas dérivable en 0.

b) ne peut pas être dérivable en 0 car elle n'est pas continue en ce point.

c) est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$ car f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de la forme $1 + o(t)$.

d) est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$ car f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de la forme $1 + t + o(t)$.

26. La fonction f

a) n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) est dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) a pour dérivée sur $\mathbb{R}^\star$ la fonction f' définie par $f'(t) = 1/(t(1+t^2)) + \arctan(t)/t^2$.

d) a pour dérivée sur $\mathbb{R}^\star$ la fonction f' définie par $f'(t) = 1/(t(1+t^2)) - \arctan(t)/t^2$.

27. Soit $I(t) = \displaystyle\int_0^t u^2/(1+u^2)^2\,du$ pour tout t réel non nul. On montre que, pour tout t réel non nul

a) $I(t) = t/(1+t^2) - \arctan(t)/2$.

b) $I(t) = -t/(1+t^2) + \arctan(t)/2$.

c) $I(t) = -t^2 f'(t)/2$.

d) $I(t) = t^2 f'(t)/2$.

28. On en déduit que la fonction f est

a) croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$.

b) croissante sur $\mathbb{R}$.

c) décroissante sur $\mathbb{R}$.

d) décroissante sur $[1/2, +\infty[$ et croissante sur $]-\infty, 1/2]$.

29. La courbe $\mathscr{C}_f$, représentative de la fonction f dans un repère orthonormé

a) est symétrique par rapport à l'origine du repère.
b) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
c) admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.
d) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

On considère l'application φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \frac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^\star$ et $\varphi(0) = 1$. φ' désigne la dérivée de la fonctiton φ.

30. La fonction φ

a) n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.
b) est continue sur $\mathbb{R}$ car $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = 1$.
c) est paire.
d) est impaire.

31. Les fonctions f et φ vérifient, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$,

a) $\varphi(x) \leq f(x) \leq 1$.
b) $1 \leq f(x) \leq \varphi(x)$.
c) $f(x) \leq \varphi(x) \leq 1$ car les fonctions f et φ sont paires et f est croissante sur $[0, x]$ pour tout x réel strictement positif.
d) $f(x) \leq \varphi(x) \leq 1$ car les fonctions f et φ sont paires et f est croissante sur $[x, 0]$ pour tout x réel strictement négatif.

32. La fonction φ

a) n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.
b) est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ et a pour dérivée $\varphi'(x) = (f(x) - \varphi(x))/x$.
c) est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 1$ car φ admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de la forme $1 + t + o(t)$.
d) est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$ car φ admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de la forme $1 + o(t)$.

33. On pose $J(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$ pour tout x réel supérieur à 1. On montre que

a) $(\pi \ln x)/2 \leq J(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1, +\infty[$.
b) $J(x) \leq \pi(\ln x)/2$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1, +\infty[$.
c) $\varphi(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
d) $\varphi(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

34. La courbe $\mathscr{C}_\varphi$ représentative de la fonction φ dans un repère orthonormé,

a) est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
b) est symétrique par rapport à l'origine du repère.
c) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
d) admet une tangente vertivale au point d'abscisse 0.

35. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ pour tout n entier naturel et u_0 réel fixé. On montre que

a) φ est une bijection sur $\mathbb{R}$.
b) φ induit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $]-\infty, 1]$.
c) pour tout n entier naturel, $|u_n - \alpha| \leq (1/4)^n |u_0 - \alpha|$ où α est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$ sur $\mathbb{R}$.
d) la suite (u_n) converge vers 0.

36. On considère l'équation différentielle $(E)\ :\ x^2y' + xy = \arctan x$. L'équation différentielle (E)

a) n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$.

b) admet une solution sur l'intervalle $]0, +\infty[$ de la forme $\varphi(x) + K/x$, où K est une constante réelle arbitraire, mais n'admet pas de solution sur l'intervalle $]-\infty, 0[$.

c) admet une infinité de solutions sur $\mathbb{R}$, de la forme $\varphi(x) + K/x$, où K est une constante réelle arbitraire.

d) admet la fonction φ pour unique solution sur $\mathbb{R}$.

Document réponse

	a)	b)	c)	d)	e)
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					
6.					
7.					
8.					
9.					
10.					
11.					
12.					
13.					
14.					
15.					
16.					
17.					
18.					
19.					
20.					
21.					
22.					
23.					
24.					
25.					
26.					
27.					
28.					
29.					
30.					
31.					
32.					
33.					
34.					
35.					
36.					