Devoir à la Maison

Deux démonstration du théorème de Morley

Non relevé

■ ■ ■

Le théorème de Morley a été démontré par Frank Morley en 1898, et on peut l'énoncer comme ceci : *Dans un triangle non plat, trois points pris parmi les points d'intersection des trisectrices issues des sommets du triangle forment un triangle équilatéral.*

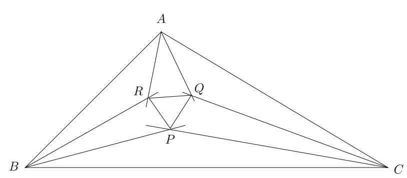
Notations.

On travaille dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Si O, A et B sont trois points du plan (avec A et B distincts de O), on note $\widehat{AOB}$ l'angle géométrique saillant (mesuré dans $[0, \pi]$) délimité par les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$. Par abus de notation, on note encore $\widehat{AOB}$ la mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$.

Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan passant par O. On dira que $\mathscr{D}$ est une trisectrice de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ si et seulement s'il existe un point M de $\mathscr{D}$, distinct de O, tel que $\widehat{AOM} = \frac{1}{3}\widehat{AOB}$ ou $\widehat{BOM} = \frac{1}{3}\widehat{AOB}$ (de sorte que tout angle géométrique de mesure non nulle admet exactement deux trisectrices). La distance entre deux points A et B est notée AB. Les angles de vecteurs sont orientés. On appelle mesure principale d'un angle de deux vecteurs non nul, celle qui appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Le complexe égal à $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est noté j.

On considère un triangle non plat ABC que l'on suppose direct c'est-à-dire tel que la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ soit comprise strictement entre 0 et π. On note 3α, 3β, 3γ les mesures principales respectives des angles orientés $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$; elles appartiennent donc toutes à l'intervalle $]0; \pi[$.

On note P, Q, R les points d'intersection des trisectrices issues respectivement des sommets adjacents B et C, C et A, A et B, tels que définis par la figure ci-dessous.



Partie I : Partie A : Une démonstration (datant de 1996) de D. J. Newman

1. La relation des sinus. Soient Ω le centre du cercle circonscrit et r le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. On note $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. On admettra dans la suite la relation dite des sinus : $\frac{a}{\sin 3\alpha} = \frac{b}{\sin 3\beta} = \frac{c}{\sin 3\gamma} = 2r$.

a) En appliquant la relation des sinus aux triangles ABR et ABC, montrer que $AR = 2r \sin\beta \frac{\sin(3\alpha+3\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$.

b) Soit θ un nombre réel. Exprimer $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

c) Montrer que $4 \sin\gamma \sin\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) = \frac{\sin(3\alpha+3\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$.

d) Montrer que $AR = 8r \sin\beta \sin\gamma \sin\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)$.

e) En déduire que $AQ = 8r \sin\beta \sin\gamma \sin\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right)$.

2. Relations angulaires. On considère le point M de la demi-droite $[AQ)$ vérifiant $\widehat{ARM} = \frac{\pi}{3} + \beta$.

a) Calculer $\widehat{AMR}$.

b) En appliquant la relation des sinus dans le triangle ARM, montrer que $AM = AQ$.

c) En déduire les valeurs des angles $\widehat{ARQ}$ et $\widehat{AQR}$.

3. Montrer que $RQ = 8r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$.

4. Conclure.

Partie II : Partie B : Une démonstration (datant de 1998) d'Alain Connes

On note P', Q' et R' les symétriques des points P, Q et R respectivement par rapport aux droites (BC), (AC) et (AB), et A' le symétrique de A par rapport à la droite (BC).
On appelle f la rotation de centre A et d'angle 2α, g la rotation de centre B et d'angle 2β et h la rotation de centre C et d'angle 2γ.

5. On considère trois points A_1, A_2, A_3 du plan complexe d'affixes respectifs a_1, a_2, a_3. Prouver que le triangle $A_1A_2A_3$ est équilatéral, avec l'angle orienté $(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3})$ de mesure principale égale à $\frac{\pi}{3}$, si et seulement si $a_1 + ja_2 + j^2a_3 = 0$.

6. Remarques préliminaires.

a) Calculer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CP'})$.

b) Montrer que P est un point fixe de la transformation $g \circ h$, c'es-à-dire que $g\left(h(P)\right) = P$.

7. Quelques calculs numériques.
Soit M un point du plan d'affixe z et φ une transformation du plan. Par abus de langage on note encore $\varphi(z)$ l'affixe du point $\varphi(M)$.

a) Justifier l'existence de six nombres complexes a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 tels que, pour tout nombre complexe z : $f(z) = a_1z + b_1$, $g(z) = a_2z + b_2$ et $h(z) = a_3z + b_3$.

b) Calculer le produit $a_1a_2a_3$.

c) Exprimer les nombres complexes p, q, r en fonction des nombres complexes $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$.

8. On note f^3 (resp. g^3, h^3) l'application $f \circ f \circ f$ (resp. $g \circ g \circ g$, $h \circ h \circ h$).

a) Prouver que $f^3 \circ g^3 \circ h^3$ est une translation notée τ.

b) Déterminer géométriquement l'image du point A par la translation τ.

9. On admet que des calculs simples donnent

$$f^3 \circ g^3 \circ h^3(0) = (a_1^2 + a_1 + 1)b_1 + a_1^3(a_2^2 + a_2 + 1)b_2 + a_1^3a_2^3(a_3^2 + a_3 + 1)b_3.$$

$$p + jq + j^2r = -j^2\frac{a_3\left[(a_1^2 + a_1 + 1)b_1 + a_1^3(a_2^2 + a_2 + 1)b_2 + a_1^3a_2^3(a_3^2 + a_3 + 1)b_3\right]}{a_1(1 - a_2a_3)(1 - a_3a_1)(1 - a_1a_2)}.$$

Démontrer le théorème de Morley dans le cas d'un triangle ABC direct.