■ ■ ■

Soient p, q deux nombres complexes. On s'intéresse dans un premier temps aux solutions de l'équation

$$x^3 + px + q = 0. \tag{1}$$

On notera $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$ et δ une racine carrée de Δ.

1. Soit x_0 une solution de l'équation (1). On considère deux nombres complexes u, v tels que $x_0 = u + v$.

a) Calculer $u^3 + v^3 + (p + 3uv)(u + v) + q$.

b) En choisissant les nombres complexes u, v tels que $3uv + p = 0$, montrer que u^3 et v^3 sont solution d'une équation du second degré à préciser.

c) En posant ρ_1, resp. ρ_2, une racine cubique de $\frac{-q+\delta}{2}$, resp. $\frac{-q-\delta}{2}$, déduire des questions précéndentes l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2. Si p et q sont réels, discuter, en fonction de Δ, le nombre de racines réelles de l'équation (1).

3. En déduire les solutions complexes des équations

a) $z^3 = 36z + 91$.

b) $z^3 + 3z + 2 = 0$.

c) $z^3 - 3z + 2 = 0$.

Soient a, b, c, d quatre nombres complexes. On suppose que $a \neq 0$ et on s'intéresse à l'équation

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \tag{2}$$

4. En posant $x = \lambda + X$ dans l'équation (2), et en choisissant λ de manière judicieuse, montrer qu'il existe deux nombres complexes p, q tels que $X^3 + pX + q = 0$ (On précisera les valeurs de p et q en fonction de a, b, c, d).

5. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^3 + 3z^2 - 3z + 4 = 0$.