



Soit q une fonction continue, définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} . On appelle solution de l'équation différentielle (E) : $y'' + qy = 0$ toute fonction y définie sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} , deux fois dérivable, qui vérifie, pour tout réel t , l'équation $y''(t) + q(t)y(t) = 0$.

On admettra (*Théorème de Cauchy-Lipschitz*) que, pour tous nombres réels t_0, y_0, y'_0 , il existe une *unique* solution de (E) qui satisfait

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0.$$

On dit qu'une fonction est positive (resp. négative) si pour tout nombre réel t , $f(t) \geq 0$ (resp. $f(t) \leq 0$).

1. Soient y, z deux solutions de (E) . Montrer que la fonction $yz' - y'z$ est constante.
(*Cette fonction s'appelle le Wronskien du couple (y, z)*).

2. On désigne par y_1 et y_2 les solutions de l'équation (E) qui satisfont

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1 & , & & y'_1(0) &= 0, \\ y_2(0) &= 0 & , & & y'_2(0) &= 1. \end{aligned}$$

a) Calculer la valeur de $y_1y'_2 - y_2y'_1$.

b) Existe-t-il un réel $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $y_1(t_0) = y_2(t_0) = 0$?

c) Montrer que z est une solution de (E) si et seulement s'il existe deux constantes réelles λ, μ telles que $z = \lambda y_1 + \mu y_2$.

d) Montrer que si z est solution de l'équation différentielle, le couple (λ, μ) défini à la question précédente est unique.

3. Montrer que si q est une fonction paire, la fonction y_1 est paire et la fonction y_2 est impaire.