STANISLAS | Devoir à la Maison | **MPSI 1**
DM n°07 | Autour des coniques | 3h

à rendre le lundi 12 novembre 2012

■ ■ ■

Exercice 1. (Cercles de Chasles) Dans cet exercice, on identifie le plan muni d'un repère orthonormé avec le plan complexe. Soient a, b deux réels strictement positifs tels que $a > b$. On note $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ et $\mathscr{E}$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Les foyers de $\mathscr{E}$ seront notés F et F'.

Soit M un point de l'ellipse $\mathscr{E}$ d'affixe z. On lui associe les points M' d'affixe z' tels que $z^2 + (z')^2 = c^2$.

1. Une propriété d'orthogonalité.

a) Déterminer les points associés à chacun des quatre sommets de l'ellipse.

b) Montrer que $(c - z)(c + z) = (z')^2$ et en déduire que $(OM')^2 = MF \cdot MF'$.

c) Montrer que la droite (OM') est orthogonale à la bissectrice intérieure à l'angle FMF'.

2. Étude des relations entres les points et leurs associés.

a) Montrer que

$$|z - c|^2 + |z + c|^2 = 2(|z|^2 + c^2) \text{ et } MF + MF' = M'F + M'F'.$$

b) En déduire que $M' \in \mathscr{E}$.

c) Expliquer comment on peut construire, pour tout point M de $\mathscr{E}$, les points qui lui sont associés.

d) Faire une figure en plaçant deux points quelconques de l'ellipse M_1 et M_2, ayant les mêmes associés M_1' et M_2'. Les droites (M_1M_2) et $(M_1'M_2')$ s'appellent des diamètres conjugués.

3. Construction des cercles de Chasles. Soient P, P' les deux points d'affixes respectives $u = z + iz'$ et $u' = z - iz'$.

a) Montrer que $MF + MF' = OP + OP'$.

b) On écrit sous forme algébrique $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Montrer que $xy + x'y' = 0$ puis que $x^2 + (x')^2 = a^2$.

c) Montrer que quand M décrit l'ellipse $\mathscr{E}$, les points P et P' décrivent deux cercles dont on précisera les caractéristiques.

d) Faire une figure de l'ellipse et de ces deux cercles comportant les constructions des points P et P' à partir d'un couple de points associés (M, M').

Exercice 2. (Loi de groupe sur une hyperbole)
On rappelle que $(G, *)$ est un groupe si

(i) $*$ est une loi interne sur G, i.e. $\forall\ x,\ y \in G,\ x * y \in G$.

(ii) $*$ est associative, i.e. $\forall\ x,\ y,\ z \in G,\ (x * y) * z = x * (y * z)$.

(iii) Il existe un élément neutre pour $*$, i.e. $\exists\ e \in G\ ;\ \forall\ x \in G,\ x * e = e * x = x$.

(iv) Tout élément de G possède un symétrique, i.e. $\forall\ x \in G,\ \exists\ y \in G\ ;\ x * y = y * x = e$.

Le plan usuel $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On note $\mathscr{H}$ l'hyperbole d'équation cartésienne $x^2 - 3y^2 = 1$.

Partie I : Étude de $\mathcal{H}$

1. Préciser les coordonnées des sommets A et A' de l'hyperbole $\mathscr{H}$ où A désigne le sommet d'abscisse positive et A' celui d'abscisse négative.

2. Déterminer l'excentricité e de $\mathscr{H}$.

Partie II : Une loi de composition interne sur le plan

On munit le plan $\mathscr{P}$ d'une loi de composition interne notée $*$ qui aux points M et M' de coordonnées cartésiennes respectives (x, y) et (x', y') associe le point $N = M * M'$ de coordonnées (α, β) avec

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha & = & xx' + 3yy' \\ \beta & = & xy' + yx' \end{array}\right.$$

3. Montrer que la loi $*$ est associative, commutative et qu'elle possède un élément neutre à préciser.

4. On considère l'application $F\ :\ \mathscr{P} \to \mathbb{R}$ qui à un point M de coordonnées cartésiennes (x, y) associe $F(M) = x^2 - 3y^2$. Décrire les lignes de niveau $E_0 = \{M \in \mathscr{P}\ ;\ F(M) = 0\}$ et $E_1 = \{M \in \mathscr{P}\ ;\ F(M) = 1\}$.

5. Montrer que

$$\forall\ (M, M') \in \mathscr{P}^2,\ F(M * M') = F(M)F(M').$$

6. En déduire que si M et M' appartiennent à $\mathscr{H}$ alors $M * M'$ appartient à $\mathscr{H}$.

Partie III : Structure de groupe sur $\mathscr{H}$

7. Montrer $(\mathscr{H}, *)$ est un groupe commutatif et que le symétrique d'un point M de $\mathscr{H}$ pour la loi $*$ est le symétrique de M par rapport à l'axe (Ox).

8. On note $\mathscr{H}^+$ l'ensemble des points de $\mathscr{H}$ d'abscisses strictement positives et $\mathscr{H}^- = \mathscr{H} \setminus \mathscr{H}^+$.

a) $(\mathscr{H}^+, *)$ est-il un groupe ?

b) $(\mathscr{H}^-, *)$ est-il un groupe ?