



Sauf mention contraire, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite réelle bornée.

1. Pour tout entier naturel p , on note $U_p = \{u_n, n \geq p\}$. Montrer que U_p admet une borne inférieure et une borne supérieure. Nous les noterons respectivement $i_p = \inf_{n \geq p} u_n$ et $s_p = \sup_{n \geq p} u_n$.

2. Montrer que les suites $(i_p)_{p \in \mathbb{N}}$ et $(s_p)_{p \in \mathbb{N}}$ sont convergentes. Nous noterons respectivement leurs limites $\limsup u = \lim_{p \rightarrow \infty} \sup_{n \geq p} u_n$ et $\liminf u = \lim_{p \rightarrow \infty} \inf_{n \geq p} u_n$.

3. Exemples. Déterminer les valeurs de $\limsup u$ et $\liminf u$ pour les suites suivantes (votre réponse sera argumentée).

a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \frac{1}{n}$.

d) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sin(n)$.

4. Lien avec la notion de limite. Soit ℓ un réel.

a) Montrer que pour tout $n \geq p$, $i_p \leq u_n \leq s_p$.

b) En déduire que $\limsup u = \liminf u = \ell$ si et seulement si la suite u converge vers ℓ .

5. Le théorème de Bolzano-Weierstrass.

a) Montrer qu'il existe une sous-suite de u qui converge vers $\limsup u$.

b) En déduire une nouvelle démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass.

6. La complétude de \mathbb{R} . Dans cette question, la suite u n'est pas supposée bornée. On suppose que la suite u est une suite de Cauchy de \mathbb{R} , c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} ; \forall n, p \geq n_0, |u_n - u_p| \leq \varepsilon.$$

a) Montrer que $(s_p - i_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

b) En déduire que la suite u converge.