



Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ et $f(0) = 1$.

Partie I : Étude de fonction

- Étude de la régularité de la fonction f .
 - Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, calculer $f'(x)$.
 - Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et préciser $f'(0)$.
- Comportement de la fonction f .
 - Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et préciser la nature des branches infinies ainsi que leur position par rapport à la courbe représentative de f .
 - Dresser le tableau des variations de f .

Partie II : Développements limités

Soit n un entier naturel non nul.

- Déterminer le développement limité de $\frac{e^x - 1}{x}$ à l'ordre n en 0.
- En déduire (sans le calculer) que f admet un développement limité d'ordre n en 0.
On notera dans toute la suite $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!} x^k + o(x^n)$ ce développement limité.
- Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0. En déduire b_0, b_1, b_2, b_3 .
- Une relation de récurrence sur les $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - En remarquant que $x = f(x)(e^x - 1)$, montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_{n-k} = 0.$$

- En déduire une formule de récurrence permettant le calcul de b_n .
- Écrire une procédure `bernoulli(n)` qui prend comme argument un entier naturel n et calcule b_n .

Partie III : Étude d'une suite de polynômes

Pour tout $n \geq 0$, on pose $B_n(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$. B_n est appelé le n -ème polynôme de Bernoulli. On utilisera des notations identiques pour polynômes et fonctions polynomiales associées.

- Déterminer B_0, B_1, B_2 en explicitant les coefficients.
- Soit $n \geq 2$. Montrer les égalités suivantes.
 - $B_n(0) = B_n(1)$.
 - $B'_n(X) = nB_{n-1}(X)$.
 - $\int_0^1 B_n(x) dx = 0$.
- Pour tout $n \geq 0$, posons $Q_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$.
 - Montrer que $Q_0(X) = B_0(X)$.
 - Pour tout $n \geq 2$, calculer $Q'_n(X)$.
 - En déduire que pour tout $n \geq 0$, $Q_n(X) = B_n(X)$.
 - En déduire que pour tout $n \geq 1$, $b_{2n+1} = 0$.