Stanislas
DM n°13

Devoir à la Maison

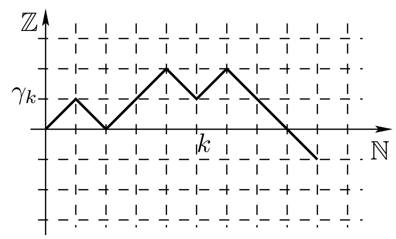
Marches au hasard
à rendre le lundi 11 février 2013

MPSI 1

■ ■ ■

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On ensemble des chemins de marches aléatoires de longueur n et on note Ω_n l'ensemble

$$\Omega_n = \{\gamma \ : \ [\![0,n]\!] \to \mathbb{Z} \ ; \ \gamma(0) = 0, \, |\gamma(i+1) - \gamma(i)| = 1, \, \forall\, i \in [\![0, n-1]\!]\} \, .$$



1. Quelques propriétés des marches aléatoires. Soit $\gamma \in \Omega_n$.

a) Montrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\gamma(k) \in \mathbb{Z}$.

b) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Montrer que si k est pair, alors $\gamma(k)$ est pair.

2. Remarquer que le chemin d'une marche aléatoire est une succesion de *pas à gauche et de pas à droite*. En déduire la valeur du cardinal de Ω_n.

3. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. On note $\mathscr{S}_{2n,2k}$ l'ensemble des chemins de Ω_{2n} qui arrivent en $2k$, c'est-à-dire

$$\mathscr{S}_{2n,2k} = \{\gamma \in \Omega_{2n} \ ; \ \gamma(2n) = 2k\} \, .$$

a) En notant $p_{2n,2k} = \frac{|\mathscr{S}_{2n,2k}|}{|\Omega_{2n}|}$, montrer que $p_{2n,2k} = 2^{-2n}\binom{2n}{n+k}$.

b) En déduire que

$$\frac{2k}{2n} p_{2n,2k} = 2^{-2n} \left[\binom{2n-1}{n+k-1} - \binom{2n-1}{n+k} \right] .$$

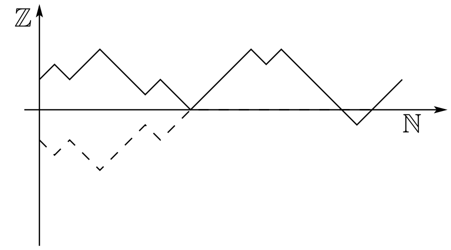
4. Soient $a, \ b > 0$. On note $N_n(a,b)$ le cardinal de $\mathscr{S}_n(a,b)$, où

$$\mathscr{S}_n(a,b) = \{\gamma \ : \ [\![0,n]\!] \to \mathbb{Z} \ ; \ \gamma(0) = a, \, |\gamma(i+1) - \gamma(i)| = 1, \, \forall\, i \in [\![0,n-1]\!], \, \gamma(n) = b\} \, .$$

On note $N_n^0(a,b)$ le nombre de ces chemins qui passent en 0, c'est-à-dire $N_n^0(a,b) = |\mathscr{S}_n^0(a,b)|$, où

$$\mathscr{S}_n^0(a,b) = \{\gamma \in \mathscr{S}_n(a,b) \ ; \ \exists\, i \in \{0, \dots, n-1\}, \, \gamma(i) = 0\} \, .$$

a) À l'aide du principe de réflexion illustré ci-dessous, construire une bijection entre les ensembles $\mathscr{S}_n^0(a,b)$ et $\mathscr{S}_n(-a,b)$ et en déduire que $N_n^0(a,b) = N_n(-a,b)$.



b) On note $N_n^{\neq 0}(0,b)$ le nombre de chemins qui relient 0 à b en n étapes sans toucher 0. Montrer le théorème de Ballot,

$$N_n^{\neq 0}(0,b) = \frac{b}{n} N_n(0,b).$$

c) On note $N_n^{\neq 0}$ le nombre de chemins de longueurs n qui ne rencontrent pas 0 entre les instants 1 et n. En utilisant la formule de Stirling, $n! \sim_\infty \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$, calculer le comportement asymptotique de la suite $\left(\frac{N_{2n}^{\neq 0}}{|\Omega_{2n}|}\right)_{n \in \mathbb{N}^\star}$.