



On propose de démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré $p > 0$. Notons $\mathcal{P} = \{|P(z)| ; z \in \mathbb{C}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ admet une borne inférieure notée α .
2. Soit $r > 0$. Montrer que pour tout nombre complexe z de module r ,

$$|P(z)| \geq |a_p|r^p - \sum_{k=0}^{p-1} |a_k|r^k.$$

3. En déduire que $\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |P(z)| = +\infty$.
4. Montrer qu'il existe une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$ tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |P(z_n)| = |P(z_0)| = \alpha$.
5. On suppose que $\alpha \neq 0$ et on pose $Q = \frac{P(X+z_0)}{P(z_0)}$.

a) Montrer que $\inf_{z \in \mathbb{C}} |Q(z)| = |Q(0)| = 1$.

b) Montrer qu'il existe $q \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $b_q \neq 0$ tels que $Q = \sum_{k=q+1}^p b_k X^k - b_q X^q + 1$.

c) On note (sous forme trigonométrique) $b_q = \rho e^{-i\theta}$ et $z = r e^{i\theta/q}$. Montrer qu'il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $r \leq r_0$,

$$|Q(z)| - 1 \leq -\rho r^q + \sum_{k=q+1}^p |b_k| r^k.$$

d) En déduire que $\alpha = 0$.

6. Conclure.