Stanislas | Devoir à la Maison | MPSI 1
DM n° 16 | Un résultat Très classique | ind. : 2h00

à rendre le lundi 25 mars 2013

■ ■ ■

On cherche dans cet exercice à calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Pour tout entier naturel n, on pose

$$Q_n = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right].$$

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel non nul.

1 . a) Montrer que $Q_n \in \mathbb{R}[X]$.

b) Déterminer le degré, le coefficient dominant et la parité de Q_n.

2 . a) Déterminer les racines de Q_n.

b) En déduire que

$$Q_n = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right).$$

3. Une somme de sinus.

a) Montrer que $Q_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{2n-2k}$.

b) En déduire que $\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$.

c) Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{2n(n+1)}{3}$.

4. Calcul de la limite.

a) Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\operatorname{cotan}\ x < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

5. Approximations.

a) Montrer que $0 \leq \frac{\pi^2}{6} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{2(2n+1)}$.

b) Écrire, en `Python`, une fonction `approx(p)` qui prend comme argument un entier naturel `p` et renvoie une valeur approchée de $\frac{\pi^2}{6}$ à $10^{-\mathtt{p}}$ près.