Devoir à la Maison

Endomorphismes nilpotents
à rendre le mardi 02 avril 2013

■ ■ ■

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, E un $\mathbb{R}$-espace vectoiel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on note $f^k = \underbrace{f \circ \cdots f}_{k\text{fois}}$. On dit que f est un endomorphisme nilpotent s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Dans toute la suite, sauf mention contraire, f et g désignent des endomorphismes nilpotents.

1. On suppose que f est non nul. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul p tel que $f^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $f^p = 0_{\mathscr{L}(E)}$. L'entier p est appelé l'indice de nilpotence de f. Par convention, l'indice de nilpotence de la matrice nulle vaut 0.

2. On note D l'opérateur de dérivation sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que D est un endomorphisme nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.

3. On note p l'indice de nilpotence de f.

a) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin \operatorname{Ker} f^{p-1}$.

b) Montrer que la famille $\mathscr{B} = (x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille libre.

c) En déduire que $p \leq n$.

d) En déduire que $f^n = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

e) Lorsque $p = n$, en déduire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

4. Soit f un endomorphisme de E. On suppose que pour tout $x \in E$, il existe $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $f^k(x) = 0_E$.

a) Montrer que f est un endomorphisme nilpotent.

b) Montrer que ce résultat est faux si on ne suppose plus E de dimension finie.

5. On suppose que f et g commutent. Montrer que $f \circ g$ et $f + g$ sont des endomorphismes nilpotents.

6. On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur $x \in E$ non nul tel que $f(x) = \lambda x$. Montrer que si λ est une valeur propre de f, alors $\lambda = 0$.

7. Décomposition de Jordan des endomorphismes nilpotents - Question difficile.

a) Montrer qu'il existe une base $\widetilde{\mathscr{B}}$ de E telle que la matrice de f dans la base $\widetilde{\mathscr{B}}$ soit de la forme $\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}$, où, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, la matrice J_i est une matrice carrée de la forme

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices J_i sont appelés blocs de Jordan.

b) Relier la dimension du noyau de f à l'entier r.