



Partie I : Formule de Wallis

Pour tout entier naturel n , on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$.

1. Calculer W_0 , W_1 et W_2 .
2. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout $n \geq 2$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \text{ et } W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

4. La formule de Wallis.

- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n+2} \leq W_{2n+1} \leq W_{2n}$.
- b) En déduire la formule de Wallis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)! \sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Partie II : Formule de Stirling

Pour tout entier naturel non nul n , on note $u_n = \left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{n!}{\sqrt{n}}$.

5. Convergence de suite.

a) Étudier la monotonie de la fonction $\varphi : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [1, +\infty[$ par $\varphi(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$.

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante. En déduire qu'elle est convergente. Nous noterons ℓ sa limite.

6. Pour tout entier naturel k , on note h_k la fonction affine vérifiant

$$h_k(k) = \ln k, \quad h_k(k+1) = \ln(k+1).$$

- a) Montrer que pour tout $t \in [k, k+1]$,

$$0 \leq \ln(t) - h_k(t) \leq (t-k) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right).$$

- b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n ,

$$0 \leq \int_1^n \ln x \, dx - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\ln(k+1) + \ln k}{2} \leq \frac{1}{2}.$$

- c) En déduire que pour tout entier naturel non nul n ,

$$\ln \left(\frac{n}{e} \right)^n - \ln n! + \ln \sqrt{n} \leq -\frac{1}{2}$$

7. Détermination de ℓ .

- a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{e} \leq u_n$.
- b)** En déduire que ℓ est non nul et que $n! \sim \ell \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$.
- c)** En utilisant la formule de Wallis, identifier ℓ . En déduire la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$