



L'usage des calculatrices est interdit.

Le plus grand soin devra être apporté à la présentation des copies.



Exercice 1. (Du déjà vu)

1. Calculer $\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$.
2. Pour tout entier naturel n , on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt$. Pour tout $n \geq 2$, exprimer W_n en fonction de W_{n-2} .
3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On note $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$ et $g(x) = \sum_{k=0}^n kx^k$. Donner des expressions de $f(x)$ puis de $g(x)$ sans signe somme.

Exercice 2. (Encore...)

1. Montrer que pour tout $x > 0$, $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.
2. a) Trouver un polynôme à coefficients réels P de degré 3 tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = P(x+1) - P(x).$$

- b) En déduire une expression de $\sum_{k=1}^n k^2$ sans signe somme.
3. Pour tout $n \geq 1$, on note $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$. Déduire des questions précédentes la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3. (Calculs de limites) Déterminer les limites des suites suivantes.

1. $u_n = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \left(3 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right)$. 2. $v_n = \frac{(1+\sqrt{3})^n - (1-\sqrt{3})^n}{(1+\sqrt{3})^{n+1} - (1-\sqrt{3})^{n+1}}$. 3. $w_n = n \cdot \tan\left(\frac{1}{n}\right)$.

Déterminer les limites suivantes.

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2 + x - 1} - 3x$. 5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2+x-1} - \sqrt{x^2-2x-1}}$. 6. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+1}}{\ln x}$.

Exercice 4. (Nombres complexes) Pour tout nombre complexe $z = x + iy$, avec x et y réels et $(x, y) \neq (-1, 0)$, on considère le nombre complexe U défini par $U = \frac{z-i}{z+1}$.

1. On note $U = X + iY$, avec X et Y réels. Exprimer X et Y en fonction de x et de y .
2. Décrire géométriquement l'ensemble
 - a) \mathcal{E}_1 des points M du plan tels que U soit imaginaire pur,
 - b) \mathcal{E}_2 des points M du plan tels que U soit réel,
 - c) \mathcal{E}_3 des points M du plan tels que U soit réel et strictement négatif.

Exercice 5. ((In)Équations)

1. Déterminer l'ensemble de définition puis résoudre l'équation $\ln(2x-1) = \ln 2$.
2. Même question avec l'équation $2(\ln x)^2 - 3 \ln \frac{1}{x} - 9 = 0$.
3. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $5x \leq -\frac{5x+3}{x-1}$.

Exercice 6. (Calculs)

1. Montrer que pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}_+$, $(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$.
2. Étudier les variations de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = x - \sqrt{|4x - x^2|}$.