



L'usage des calculatrices est interdit.

Un grand soin devra être apporté à la rédaction.

Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.



Exercice 1. Soit $m \in \mathbb{C}$. Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4$,

$$\begin{cases} x + my + m^2z + m^3t = m \\ mx + m^2y + m^3z + t = m^2 \\ m^2x + m^3y + z + mt = m^3 \\ m^3x + y + mz + m^2t = m^4 \\ x - y + z - t = 2 \end{cases}$$

Exercice 2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = \sqrt[3]{v_n + \frac{1}{2^n}}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes positifs.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $f_n(x) = x^3 - x - \frac{1}{2^n}$.
 - a) Dresser le tableau de variations de f .
 - b) Montrer que l'équation $x^3 - x - \frac{1}{2^n} = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que nous noterons α_n .
3.
 - a) Pour tout réel positif x , étudier le signe de $f_n(x) - f_{n+1}(x)$.
 - b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
 - c) Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $v_n \geq \alpha_n$.
 - d) En déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.
4. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Problème. (Calcul de $\cos \frac{\pi}{17}$ par radicaux) Dans tout ce problème, on note $\theta = \frac{\pi}{17}$.

1. Soient a, b deux réels et n un entier naturel non nul. On pose

$$C_n(a, b) = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb), \quad S_n(a, b) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + kb).$$

a) On suppose que $\sin \frac{b}{2} = 0$. Calculer $C_n(a, b)$ et $S_n(a, b)$ en fonction de a et de n (le résultat ne devra pas faire intervenir le signe somme).

b) On suppose que $\sin \frac{b}{2} \neq 0$. Donner une expression de $C_n(a, b)$ et de $S_n(a, b)$ ne faisant pas intervenir le signe somme.

2. On pose

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(11\theta), \\ x_2 &= \cos(\theta) + \cos(9\theta) + \cos(13\theta) + \cos(15\theta). \end{aligned}$$

- a)** Montrer que $x_1 > 0$.
 - b)** Calculer la somme $x_1 + x_2$. (On l'exprimera sous forme d'un nombre rationnel simple).
 - c)** Exprimer le produit $x_1 x_2$ en fonction de la somme $x_1 + x_2$.
 - d)** En déduire les valeurs de x_1 et x_2 .
- 3.** On pose

$$y_1 = \cos(3\theta) + \cos(5\theta)$$

$$y_2 = \cos(7\theta) + \cos(11\theta)$$

$$y_3 = \cos(\theta) + \cos(13\theta)$$

$$y_4 = \cos(9\theta) + \cos(15\theta)$$

- a)** Calculer les produits $y_1 y_2$ et $y_3 y_4$.
- b)** En déduire les expressions de y_1 , y_2 , y_3 et y_4 .
- c)** Calculer $\cos \theta \cos(13\theta)$ et décrire une méthode qui permette de montrer que

$$\cos \theta = \frac{1}{16} \left(1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{68 + 12\sqrt{17} + 2\sqrt{680 + 152\sqrt{17}}} \right).$$