STANISLAS	Devoir Surveillé	**MPSI 1**
DS n°02	4h	06 octobre 2012

■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

■ ■ ■

Exercice 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer $S_1 = \sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} (i+j)^2$.

2. Soit $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}_2$ des nombres complexes z tels que

$$z^{10}\cos^2\varphi - 2z^5\cos^2\varphi + 1 = 0.$$

3. Décrire l'ensemble $\mathscr{E}_3$ des nombres complexes z tels que $z^8 + z^6 + z^4 + z^2 + 1 = 0$.

Exercice 2. (Quelques formules autour de l'arctangente) Pour tout entier naturel non nul m, on note $\mathscr{C}_m$ l'ensemble des couples de réels (x, y) tels que $m \arctan \frac{1}{x} + \arctan \frac{1}{y} \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi]$.

1. Soient x et y deux réels non nuls. On pose $\alpha = \arctan \frac{1}{x}$ et $\beta = \arctan \frac{1}{y}$.

a) Écrire, en fonction uniquement de α, le nombre complexe $x+i$ sous forme trigonométrique.

b) En déduire que $(x, y) \in \mathscr{C}_m$ si et seulement si $(x+i)^m(y+i)e^{-i\frac{\pi}{4}} \in \mathbb{R}$.

2. Déduire des questions précédentes l'égalité

$$\frac{\pi}{4} = 2\arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{1}{7}.$$

3 . a) Soient p, q, r trois réels positifs tels que $p \neq 0$ et $1 + p^2 = qr$. Montrer que

$$\arctan\frac{1}{p} = \arctan\frac{1}{p+r} + \arctan\frac{1}{p+q}.$$

b) En déduire que pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < x < y$,

$$\arctan\frac{1}{x} = \arctan\frac{1}{y} + \arctan\frac{y-x}{1+xy}.$$

4. Déduire des expressions précédentes l'égalité

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{7} + 2\arctan\frac{1}{3}.$$

Exercice 3. Soient f et g les fonctions définies par

$$f(x) = \frac{1}{2}\arctan(\sinh x)$$
$$g(x) = \arctan\frac{\sinh x}{1+\cosh x}.$$

1. Déterminer les domaines de définition (notés D_f, D_g) et de dérivabilité (notés D'_f, D'_g) de f et g.

2. Comparer les fonctions f et g sur leur intervalle de définition commun.

3. Calculer $f\left(\frac{\ln 3}{2}\right)$, puis en déduire une expression simple (ne faisant intervenir que les opérations $+$, $-$, $\cdot$, $/$, $\sqrt{\ }$) de $\tan\frac{\pi}{12}$.

Problème. (Irrationalité de $\frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{3}$) Dans ce problème, on pose $\alpha = \frac{1}{\pi}\arccos\frac{1}{3}$.

Partie I : Quelques résultats

1. Déterminer un entier naturel k non nul tel que $\frac{1}{k+1} < \alpha < \frac{1}{k}$.

2. Déterminer l'ensemble des réels x tels que $\arccos(x) = 3\arccos\frac{1}{3}$.

Partie II : Irrationalité

On définit par récurrence deux suites d'entiers $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ par $a_1 = 1$, $b_1 = 2$ et pour tout entier naturel n non nul, $a_{n+1} = a_n - 4b_n$, $b_{n+1} = 2a_n + b_n$.

3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $(1+2i\sqrt{2})^n = a_n + ib_n\sqrt{2}$.

4. Montrer que, pour tout entier naturel non nul, si 3 divise $a_{n+1} - b_{n+1}$, alors 3 divise $a_n - b_n$.

5. Écrire le nombre complexe $e^{i\alpha\pi}$ sous forme algébrique.

6. Montrer que si α est rationnel, alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $(1+2i\sqrt{2})^n = 3^n$.

7. Conclure quant à l'irrationalité de α.

Partie III : Étude de suites

Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ sont celles définies dans la partie précédente.

8. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $a_n = 3^n\cos(n\pi\alpha)$ et $b_n = \frac{3^n}{\sqrt{2}}\sin(n\pi\alpha)$.

9. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $a_n \neq 0$.

Dans toute la suite, on note $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $r_n = \frac{b_n}{a_n}$.

10. Exprimer r_{n+1} en fonction de r_n.

11. Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas de réel ℓ tel que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers ℓ.

12. Montrer par l'absurde que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ ne tend pas vers l'infini.

Exercice 4. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} x_k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} x_k\right)^2$. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un entier m tel que $\sum_{k=0}^{n} x_k = \frac{m(m+1)}{2}$.