■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

■ ■ ■

Exercice 1. Soit $\mathscr{E}$ l'équation différentielle $|x|y'(x) - y(x) = x^2$.

1. Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}_+$ des solutions de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.

2. Déterminer l'ensemble $\mathscr{S}_-$ des solutions de $\mathscr{E}$ sur $\mathbb{R}_-^\star$.

3. En étudiant le recollement des solutions en 0, montrer que $\mathscr{E}$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que vous expliciterez.

$$\boxed{\begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2,\ x \geq 0 \\ x & \mapsto & -\frac{x^2}{3},\ x \leq 0 \end{array}}$$

Exercice 2. (Strophoïde droite) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère un réel a strictement positif.

Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $x = 2a$ et $\mathscr{C}$ le cercle de centre M_0 de coordonnées $(-2a, 0)$ et de rayon $2a$. Pour tout nombre réel θ, on note $\mathscr{D}_\theta$ la droite passant par O dont un vecteur directeur forme un angle θ avec le vecteur $\overrightarrow{i}$,

- H_θ le point d'intersection, lorsqu'il existe, des droites $\mathscr{D}_\theta$ et $\mathscr{D}$.
- M_θ le point d'intersection de la droite M_θ et du cercle $\mathscr{C}$ (lorsqu'il y a deux points d'intersection, M_θ désigne le point d'intersection distinct de O.
- I_θ le milieu du segment $[M_\theta H_\theta]$.

1. Donner une équation cartésienne puis une équation polaire du cercle $\mathscr{C}$.

2. Déterminer des coordonnées polaires de H_θ, M_θ, puis de I_θ.

On note $\mathscr{S}$ la courbe paramétrée définie par l'équation polaire

$$r(\theta) = -a\frac{\cos(2\theta)}{\cos(\theta)}.$$

3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer, lorsqu'ils existent, $r(\theta + 2\pi)$, $r(-\theta)$ et $r(\theta + \pi)$ en fonction de $r(\theta)$. Interpréter géométriquement ces résultats et indiquer sur quelle partie E de $\mathbb{R}$ il suffit d'étudier $\mathscr{S}$.

4. Déterminer la limite de $r(\theta)\cos(\theta)$ lorsque θ tend vers $\frac{\pi}{2}$. Interpréter géométriquement ce résultat.

5. Étudier le signe de $r(\theta)$ pour θ variant dans E. Représenter sur une même figure, lorsque $a = 1$, la droite $\mathscr{D}$, le cercle $\mathscr{C}$ et le support de la courbe $\mathscr{S}$.

6. Donner une équation cartésienne du support de la courbe $\mathscr{S}$.

Problème. (Polaire d'un point par rapport à un cercle) Soit $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère orthonormé direct du plan affine et $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique. On notera en majuscule les points et en minuscule les affixes : a désignera toujours l'affixe de A, b celle de B,... sauf pour I et éventuellement M qui aura pour affixe z.

Soient A, B, C, $D \in \mathscr{C}$ quatre points distincts.

Partie I : Préliminaires

1. Comparer $\overline{a}$ et $\frac{1}{a}$.

2. Montrer que ABC est rectangle en A si et seulement si $b + c = 0$.

3. Montrer que ABC est isocèle en A si et seulement si $a^2 = bc$.

4. Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $ab = cd$.

Partie II : Polaire d'un point par rapport à un cercle.

Soient z_0 un nombre complexe tel que $|z_0| > 1$ et M_0 le point d'affixe z_0.

5. Soient $k \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{C}^\star$. Montrer que $\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} = k$ est l'équation d'une droite dont on déterminera une équation cartésienne.

6. Montrer que $M(z) \in (AB)$ si et seulement si $z = a + b - ab\overline{z}$.

7. On suppose dans cette question que (AB) et (CD) ne sont pas parallèles et on note $M(z)$ leur point d'intersection. Exprimer $\overline{z}$ en fonction de a, b, c, d.

8. Montrer qu'il existe exactement deux tangentes à $\mathscr{C}$ passant par M_0. On désigne dans la suite par t_1 et t_2 les affixes des points de tangence de ces droites.

9. On considère deux droites passant par M_0 qui coupent respectivement $\mathscr{C}$ en A et B distincts, respectivement C et D distincts. On suppose que (AD) n'est pas parallèle à (BC). Montrer que le point d'intersection M d'affixe z_1 de (AD) et (BC) est situé sur la droite Δ_{M_0} d'équation $\overline{z_0}z + z_0\overline{z} = 2$.

Cette droite est appelée polaire de M_0 par rapport à $\mathscr{C}$.

10. Montrer que la polaire de M_0 par rapport à $\mathscr{C}$ est la droite (T_1T_2).