



L'usage des calculatrices est interdit.

Un grand soin devra être apporté à la rédaction.

Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.



Exercice 1. Déterminer, si elle existe,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\sqrt{2 + \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} - \sqrt{2} \cos \frac{2}{n} \right).$$

Problème. Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, on définit la matrice

$$M(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}.$$

Partie I : L'ensemble des quaternions

On note $\mathbb{H} = \{M(a, b, c, d), (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\}$.

1. Structure I.

a) Montrer que $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

b) Cet anneau est-il commutatif ?

2. Morphisme. On note $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}, a + ib \mapsto M(a, b, 0, 0)$.

a) Montrer que φ est un morphisme d'anneaux.

b) Montrer que φ est injectif.

On note abusivement $i = M(0, 1, 0, 0)$, puis $j = M(0, 0, 1, 0)$ et $k = M(0, 0, 0, 1)$.

c) Calculer i^2, j^2 et k^2 .

On admettra (résultat qui se montre sans difficulté) que

$$jk = -kj = i, ki = -ik = j, ij = -ji = k.$$

Pour tout $q = aI_4 + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, on définit

$$\begin{aligned} \bar{q} &= aI_4 - bi - cj - dk \\ N(q) &= q \cdot \bar{q}. \end{aligned}$$

On note $\mathbb{P} = \{bi + cj + dk, (b, c, d) \in \mathbb{R}^3\}$.

3. Structure II.

a) Exprimer simplement $N(q)$ en fonction de a, b, c, d .

- b) Traduire matriciellement l'application $q \mapsto \bar{q}$.
- c) Montrer que pour tous $q, q' \in \mathbb{H}$, $N(q \cdot q') = N(q)N(q')$.
- d) En déduire que tout élément non nul de $\mathbb{H}$ est inversible. On dira que $\mathbb{H}$ est un *corps non commutatif*.

On note $\widetilde{\mathbb{R}} = \{a \cdot I_4, a \in \mathbb{R}\}$, $\widetilde{\mathbb{R}}_+ = \{a \cdot I_4, a \in \mathbb{R}_+\}$ et $\widetilde{\mathbb{R}}_- = \{a \cdot I_4, a \in \mathbb{R}_-\}$.

4. Centre. Le centre de $\mathbb{H}$, noté $Z(\mathbb{H})$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{H}$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathbb{H}$.

- a) Montrer que $Z(\mathbb{H}) = \widetilde{\mathbb{R}}$.
- b) Montrer que $(q \in \widetilde{\mathbb{R}} \text{ si et seulement si } q^2 \in \widetilde{\mathbb{R}}_+)$ et $(q \in \mathbb{P} \text{ si et seulement si } q^2 \in \widetilde{\mathbb{R}}_-)$.

Partie II : Théorème de Frobenius

On propose de démontrer le théorème de Frobenius : *Tout corps $\mathbb{K}$ non nécessairement commutatif, contenant $\mathbb{R}$ dans son centre, et de dimension finie sur $\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$.*

On suppose dans cette partie que $\mathbb{K}$ est

- (i). un corps non nécessairement commutatif,
- (ii). $\mathbb{R}$ est inclus dans le centre de $\mathbb{K}$,
- (iii). il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout élément de $x \in \mathbb{K}$, il existe $(\lambda_0, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tel que

$$\lambda_d \neq 0 \text{ et } \sum_{k=0}^d \lambda_k x^k = 0,$$

- (iv). $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$.

On admettra que pour tous $d \in \mathbb{N}$ et $(a_d, \dots, a_0) \in \mathbb{R}^{d+1}$, il existe $m \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$, $(\alpha_0, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ et $(\beta_0, \dots, \beta_r, \gamma_0, \dots, \gamma_r) \in \mathbb{R}^{2r+2}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{K}, \sum_{k=0}^d a_k x^k = a_d \prod_{k=0}^m (x - \alpha_k) \cdot \prod_{k=0}^r ((x - \beta_k)^2 + \gamma_k^2).$$

5. Soit $a \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R}$.

- a) Montrer qu'il existe $i_a \in \mathbb{K}$ tel que $i_a^2 = -1$.
- b) En déduire que $\mathbb{K}$ contient un sous-corps isomorphe à $\mathbb{C}$.

6. Le cas commutatif. On suppose dans cette question que $\mathbb{K}$ est commutatif. Soit $b \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R}$.

- a) Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $i_b \in \mathbb{K}$ tels que $b = \alpha + i_b \beta$ et $i_b^2 = -1$.
- b) Montrer que $i_b \in \{i_a, -i_a\}$.
- c) En déduire que $\mathbb{K}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.

7. Le cas non commutatif. On suppose dans cette question que $\mathbb{K}$ n'est pas commutatif. Soit $a \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{R}$. On confond i_a et $i \in \mathbb{C}$, ce qui permet d'identifier $\mathbb{C}$ à un sous-corps de $\mathbb{K}$.

a) Soit x tel que $ix = xi$ et $\mathbb{K}_x$ le plus petit sous-corps de $\mathbb{K}$ contenant i et x . Montrer que $\mathbb{K}_x = \mathbb{C}$ puis que $x \in \mathbb{C}$.

b) Soit $y \in \mathbb{K}$ tel que $iy \neq yi$. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{K}$ tel que $zi = -iz$ puis que $z^2 \in \mathbb{C}$. On notera $\mathbb{R}(z) = \{a + bz, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

c) Montrer que $\mathbb{R}(z) \cap \mathbb{C} = \mathbb{R}$.

d) En déduire que $z^2 \in \mathbb{R}_-$.

On pose $j = \frac{z}{\sqrt{-z^2}}$ et $k = ij$. On note $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk, (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\}$. Alors, $\mathbb{H} \subset \mathbb{K}$.

e) On suppose par l'absurde que $\mathbb{H} \neq \mathbb{K}$. Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{K} \setminus \mathbb{H}$ tel que $iv = -vi$. Soit $\ell = \frac{v}{\sqrt{-v^2}}$. Montrer que $j\ell \in \mathbb{C}$ puis que $v \in \mathbb{H}$. En déduire que $u \in \mathbb{H}$.

f) Conclure.