■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

■ ■ ■

Exercice 1. (Inégalité des accroissements finis) Pour tous $u, v \in \mathbb{C}$, on note $\langle u, v\rangle = \mathscr{Re}\,(\overline{u} \cdot v)$. Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction, à valeurs complexes, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Pour tout réel $t \in [a, b]$, on pose $\varphi(t) = \langle f(b) - f(a), f(t)\rangle$.

1. Montrer que pour tout $(u, v) \in \mathbb{C}^2$,

$$|\langle u, v\rangle| \leq |u| \cdot |v|.$$

Cette inégalité est appelée inégalité de Cauchy-Schwarz.

2. Montrer qu'il existe un réel $t_0 \in]a, b[$ tel que

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (b - a)\langle f(b) - f(a), f'(t_0)\rangle.$$

3. Lorsque f' est bornée sur $]a, b[$, en déduire que

$$|f(b) - f(a)| \leq (b - a) \sup_{t \in]a,b[} |f'(t)|.$$

4. Montrer que

$$\forall\, x,\, y \in \mathbb{R},\ |e^{ix} - e^{iy}| \leq |x - y|.$$

Exercice 2. (Nombre de racines de polynômes) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

1. Soit h une application de I vers $\mathbb{R}$, dérivable sur I, et p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On suppose que h s'annule p fois sur I. Montrer que h' s'annule au moins $p - 1$ fois sur I.

2. Soit P la fonction polynomiale définie par $P(x) = 2x^5 + 5x^4 - 5x^2 - 20x + 120$. Montrer que P admet au plus 3 racines réelles.

3. Soient n un entier naturel non nul, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$, $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^\star)^n$ et f_n l'application de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x^{\alpha_k}$. Démontrer que f_n s'annule au plus $n - 1$ fois sur $\mathbb{R}_+^\star$.

4. Soit Q la fonction polynomiale définie par $Q(x) = x^{2013} - 7x^{201} - 4x^{101} + x^2$. Montrer que Q admet au plus 6 racines réelles.

Problème. (Développement asymptotique d'une fonction implicite) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

(i). f' est monotone et ne s'annule pas,

(ii). $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$ et $f(x) = o_{+\infty}(x)$,

(iii). $\forall\, b \in \mathbb{R}$, $f'(x + bf(x)) \sim_{+\infty} f'(x)$.

Dans toute la suite, les relations de comparaison sont exprimées lorsque x tend vers l'infini.

1. Soit $h : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - f(x)$.

a) Montrer qu'il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que h réalise une bijection de $[x_0, +\infty[$ dans $[y_0, +\infty[$.

b) En déduire qu'il existe $g : [y_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $x \in [y_0, +\infty[$,

$$g(x) - f(g(x)) = x.$$

c) Montrer que, pour tout $x \in [y_0, +\infty[$, il existe $z \in]g(x), x[$ (ou $]x, g(x)[$) tel que

$$f(g(x)) - f(x) = (g(x) - x)f'(z).$$

d) Montrer que $x \mapsto g(x) - x$ ne s'annule pas sur un voisinage de l'infini.

e) En déduire que $g(x) - x \sim f(x)$.

On définit la suite de fonctions (g_n) par

$$g_0(x) = x \text{ et pourtout } n \geq 1,\ g_n(x) = x + f(g_{n-1}(x)).$$

2 . a) Montrer qu'il existe $y_1 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto g(x) - g_n(x)$ ne s'annule pas sur $[y_1, +\infty[$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(x) - g_n(x) = o(g(x) - g_{n-1}(x))$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n(x) - x \sim f(x)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [a, +\infty[$, à l'aide du théorème des accroissements finis, on note

$$g(x) - g_n(x) = (g(x) - g_{n-1}(x)) \cdot f'(t_{n-1}(x)).$$

Pour alléger les notations, on oubliera la dépendance de t_{n-1} en x.

3 . a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $t_{n-1} - x \sim f(x)$.

b) En déduire que $f'(t_{n-1}) \sim f'(x)$.

c) Conclure en montrant que $g(x) - g_n(x) \sim f(x)f'(x)^n$.

4. Donner enfin une méthode permettant d'obtenir un développement asymptotique de $g(x)$.

5. Application.

a) Soit $\alpha \in]-\infty, 1[\setminus\{0\}$. Vérifier que $f : x \mapsto x^\alpha$ satisfait les conditions énoncées.

b) Donner un développement asymptotique de y en fonction de x à 3 termes lorsque $y^5 + y = x$.