



L'usage des calculatrices est interdit.

Un grand soin devra être apporté à la rédaction.

Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.



Exercice 1. Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On note Id_E l'application identité de E dans E et 0 l'application nulle de E dans E . Ces deux applications sont des applications linéaires. Pour toute application linéaire f de E dans E , on note $f^0 = \text{Id}_E$ et pour tout entier naturel n , $f^{n+1} = f \circ f^n$.

Partie I : Étude d'un cas particulier

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $f : E \rightarrow E$, $(x, y, z) \mapsto (x + y, 2y, -x + y + 2z)$.

1. Montrer que f est une application linéaire bijective.
2. Déterminer les réels λ tels que $f - \lambda \text{Id}_E$ ne soit pas injective.
3. On pose $E_1 = \text{Ker}(f - \text{Id})$ et $E_2 = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$. Soient les vecteurs $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, 1, 0)$ et $w = (0, 0, 1)$.
 - a) Déterminer E_1 et E_2 en fonction de u , v et w .
 - b) En déduire que $E = E_1 \oplus E_2$.

Partie II : Application linéaire et Polynôme annulateur

Dans cette partie, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel quelconque et f est une application linéaire de E dans E telle que $f^2 - 3f + 2\text{Id} = 0$. On note $P = X^2 - 3X + 2 \in \mathbb{R}[X]$.

4. On dit qu'un réel λ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda x$.
 - a) Montrer que si λ est une valeur propre de f , alors $P(\lambda) = 0$.
 - b) En déduire les valeurs propres possibles des valeurs propres de f .
5. On pose $g = f - \text{Id}$ et $h = f - 2\text{Id}$.
 - a) Identifier $g - h$ et en déduire que $E = \text{Im } g + \text{Im } h$.
 - b) Identifier $g \circ h$ et $h \circ g$ et en déduire que $\text{Im } h \subset \text{Ker } g$ et $\text{Im } g \subset \text{Ker } h$.
 - c) Montrer que $E = \text{Ker } g + \text{Ker } h$.
 - d) En déduire que $\text{Ker } g$ et $\text{Ker } h$ sont supplémentaires dans E .
6. a) Montrer qu'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n \geq 0}$ et $(b_n)_{n \geq 0}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^n = a_n f + b_n \text{Id}.$$

- b) Pour tout entier naturel n , exprimer f^n en fonction de n , f et Id .

Exercice 2. (Un peu de convexité)

1. Soient n un entier naturel non nul, $(x_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ et $(y_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ deux familles de réels.

- a) Exprimer $\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - y_i x_j)^2$ en fonction de $\sum_{k=1}^n x_k^2$ et $\sum_{k=1}^n y_k^2$.
- b) En déduire que $\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n y_k^2$.

2. Soit k un entier supérieur ou égal à 2. On définit les fonctions $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{p=1}^k p^x$ et $H = \ln(h)$.

- a) Étudier les variations de h , puis celles de H .
- b) Étudier la convexité de H .
- c) En déduire que

$$\left(\frac{\sum_{p=1}^k p}{\sum_{p=1}^k \frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{k+1}{2} \leq \left(\prod_{p=1}^k p^p\right)^{\frac{2}{k(k+1)}} \leq \frac{\sum_{p=1}^k p^2}{\sum_{p=1}^k p}.$$

Problème. (Dénombrement de surjections)**Partie III : Préliminaires**

Soient q, k, p trois entiers tels que $0 \leq q \leq k \leq p$.

1. Montrer que $\binom{p}{k} \cdot \binom{k}{q} = \binom{p}{q} \cdot \binom{p-q}{p-k}$.
2. En déduire $\sum_{\ell=q}^p (-1)^{p-\ell} \binom{p}{\ell} \binom{\ell}{q} = \delta_{p,q}$, où $\delta_{p,q} = 0$ si et seulement si $p \neq q$.
3. Soient n un entier naturel, $(a_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ et $(b_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ deux familles de réels. On suppose que pour tout entier $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\sum_{q=0}^p \binom{p}{q} a_q = b_p$. Pour tout entier $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, exprimer $\sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} b_k$ en fonction de a_p .

Partie IV : Nombre de surjections

Pour tout $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on note S_n^p le nombre d'applications surjectives de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$. Par convention, on pose $S_n^0 = S_0^n = 0$ et $S_0^0 = 1$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
- a) Déterminer S_n^1, S_n^2, S_n^n .
- b) Soit $p > n$. Déterminer S_n^p .
- c) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $p^n = \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} S_n^k$.
- d) On suppose n différent de 0. En déduire que

$$\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, S_n^p = \sum_{k=1}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.$$

5 . a) On suppose que $2 \leq p \leq n$. En considérant la restriction à $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ d'une surjection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$, montrer que

$$S_n^p = p \left(S_{n-1}^p + S_{n-1}^{p-1} \right).$$

b) Cette relation est-elle encore vraie lorsque $1 \leq p \leq n$?

c) En déduire que, pour tout entier naturel n , $S_{n+1}^n = \frac{n}{2}(n+1)!$.

Partie V : Nombre de partitions

Soit n un entier naturel quelconque, E un ensemble de cardinal n et k un entier naturel non nul. On dit que $\{A_1, \dots, A_k\}$ est une partition de E en k classes si et seulement si

1. $\bigcup_{i=1}^k A_i = E$,
2. $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, A_i \neq \emptyset$,
3. $\forall i, j \in \llbracket 1, k \rrbracket, A_i \cap A_j = \emptyset$.

On note R_n^k le nombre de partitions de E en k classes. On convient que $R_n^0 = 0$ si $n \geq 1$ et $R_0^0 = 1$. On note $R(n)$ le nombre de partitions de E et on convient que $R(0) = 1$.

6. Montrer que pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n < k$, alors $R_n^k = 0$.

7 . a) Montrer que pour tout entier naturel n , $R(n) = \sum_{k=0}^n R_n^k$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n , $R(n+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} R(k)$.

c) Calculer $R(n)$ pour $n \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$.

d) Montrer que pour tout entier $n \geq 5$, alors $R(n) \geq 2^n$.

e) Montrer que pour tout entier naturel n , $R(n) \leq n^n$.

8. Montrer que pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, $R_n^k = \frac{S_n^k}{k!}$.