■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

■ ■ ■

Exercice 1. Déterminer un développement limité de $e^{\cos}$ à l'ordre 5 en 0.

Problème. (Nombres Algébriques) Soit z un nombre complexe. On dit que z est algébrique s'il existe un polynôme non nul P à coefficients dans $\mathbb{Q}$ tel que $P(z) = 0$. Un nombre complexe qui n'est pas algébrique est dit transcendant. On note $\overline{\mathbb{Q}}$ l'ensemble des nombres algébriques.

Dans tout le problème, $\mathbb{C}$ est considéré comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, c'est-à-dire que les scalaires sont toujours des nombres rationnels.

Partie I : Nombres algébriques

1. Montrer que $\alpha \in \mathbb{C}$ est algébrique si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que la famille $(1, \alpha, \dots, \alpha^p)$ soit liée.

Soit α un nombre algébrique et d le plus petit des entiers naturels $p \geq 1$ tels que la famille $(1, \alpha, \dots, \alpha^p)$ soit liée. On dit que d est le *degré* de α.

2. Caractériser les nombres algébriques de degré 1.

3. Montrer que $\sqrt{3}$ est algébrique de degré 2.

4. Le nombre complexe i est-il algébrique ? Si oui, quel est son degré ?

5. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que α est algébrique de degré 2 si et seulement si α est racine d'un trinôme $X^2 + mX + p \in \mathbb{Q}[X]$ dont le discriminant $\Delta = m^2 - 4p$ n'est pas le carré d'un nombre rationnel.

Partie II : $\mathbb{Q}[\alpha]$ sous-corps de $\mathbb{C}$

Soit α un nombre algébrique de degré d. On note $\mathbb{Q}[\alpha] = \text{Vect}\{1, \alpha, \dots, \alpha^{d-1}\}$.

6. Montrer que $(1, \alpha, \dots, \alpha^{d-1})$ est une base de $\mathbb{Q}[\alpha]$.

7. Montrer que pour tout entier naturel n, $\alpha^n \in \mathbb{Q}[\alpha]$.

8. Pour tout $\beta \in \mathbb{Q}[\alpha]$, on définit $f_\beta : \mathbb{Q}[\alpha] \to \mathbb{Q}[\alpha]$ par $f_\beta(z) = \beta z$.

a) Montrer que f_β est bien définie.

b) Montrer que si $\beta \neq 0$, alors f_β est un automorphisme d'espace vectoriel.

9. Déduire de la question précédente que $\mathbb{Q}[\alpha]$ est un corps.

Partie III : Polynôme minimal

Soit α un nombre algébrique de degré d. On note $I_\alpha = \{P \in \mathbb{Q}[X] \; ; \; P(\alpha) = 0\}$.

10 . a) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $\pi_\alpha \in I_\alpha$ tel que pour tout $Q \in I_\alpha$, $\deg \pi_\alpha \leq \deg Q$. Ce polynôme s'appelle le *polynôme minimal* de α.

b) En déduire que $\deg \pi_\alpha = d$.

c) Montrer que π_α est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

d) Montrer que α est une racine simple de π_α.

11. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$. Montrer que $P \in I_\alpha$ si et seulement si π_α divise P.

12. Montrer que $X^3 - 5$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. En déduire que $\sqrt[3]{5}$ est algébrique de degré 3.

Partie IV : Le corps $\overline{\mathbb{Q}}$

Soient α un nombre algébrique de degré p et β un nombre algébrique de degré q. On note $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par $\left\{\alpha^k \beta^n,\ n,\ k \in \mathbb{N}\right\}$.

13. Montrer que la famille $(\alpha^k \beta^n)_{0 \leq k \leq p-1,\, 0 \leq n \leq q-1}$ est une partie génératrice de $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$.

14. Montrer que $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ stable par multiplication interne.

15. En déduire que $\mathbb{Q}[\alpha, \beta] \subset \overline{\mathbb{Q}}$.

16. Montrer que $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est un corps.

17. En déduire que $\overline{\mathbb{Q}}$ est un corps.

Partie V : Nombres de Liouville

On cherche à montrer que $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{C}$. Soit S un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ irréductible de degré $n \geq 2$.

18. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul C_S tel que pour tout $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (où $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$),

$$|S(r)| \geq \frac{1}{C_S q^n}.$$

19. On suppose que S admette une racine réelle α. Montrer qu'il existe une constante strictement positive K telle que pour tout $r = \frac{p}{q} \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$,

$$|\alpha - r| \geq \frac{K}{q^n}.$$

20. Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $t_n = \sum\limits_{k=0}^{n} 10^{-k!}$.

a) Montrer que la suite (t_n) est convergente. On notera t sa limite.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|t - t_n| \leq 2 \cdot 10^{-(n+1)!}.$$

c) En déduire que t est un nombre transcendant.

8 . a) Soit $(\beta, z) \in \mathbb{Q}[\alpha]^2$. D'après la définition de $\mathbb{Q}[\alpha]$, il existe $(\lambda_i, \mu_i)_{i \in [\![0, d-1]\!]} \in \mathbb{Q}^{2d}$ tels que

$$\beta = \sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i \alpha^i,$$
$$z = \sum_{i=0}^{d-1} \mu_i \alpha^i.$$

Ainsi, $f_\beta(z) = \sum\limits_{0 \leq i, j \leq d-1} \lambda_i \mu_j \alpha^{i+j}$. Or, d'après la question précédente, pour tout $(i, j) \in [\![0, d-1]\!]$, $\alpha^{i+j} \in \mathbb{Q}[\alpha]$. Ainsi, comme $\mathbb{Q}[\alpha]$ est un espace vectoriel,

$$\boxed{\forall\ z \in \mathbb{Q}[\alpha],\ f_\beta(z) \in \mathbb{Q}[\alpha].}$$

b) Soit $\beta \neq 0$.

- D'après la définition, $\mathbb{Q}[\alpha]$ est un espace vectoriel.
- Comme $\mathbb{C}$ est un corps, la multiplication est distributive par rapport à l'addition et f_β est linéaire.
- Comme $\beta \neq 0$ et $\mathbb{C}$ est intègre, alors $\operatorname{Ker} f_\beta = \{0\}$.

Ainsi, f_β est un endomorphisme injectif en dimension finie, donc, d'après le théorème du rang,

$$\boxed{f_\beta \text{ est un automorphisme.}}$$

9. Montrons que $\mathbb{Q}[\alpha]$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

- D'après la définition, $\mathbb{Q}[\alpha] \subset \mathbb{C}$.
- Comme $(\mathbb{Q}[\alpha], +, \cdot)$ est un espace vectoriel, $(\mathbb{Q}[\alpha], +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$.
- D'après la question **7.**, $\mathbb{Q}[\alpha]$ est stable par multiplication.
- D'après la définition de $\mathbb{Q}[\alpha]$, $1 \in \mathbb{Q}[\alpha]$.
- Soit $\beta \in \mathbb{Q}[\alpha]$ tel que $\beta \neq 0$. Alors, d'après la question précédente, f_β est bijective, donc surjective et il existe $z \in \mathbb{Q}[\alpha]$ tel que $f_\beta(z) = 1$. Ainsi, $\beta \cdot z = z \cdot \beta = 1$ et β est inversible dans $\mathbb{Q}[\alpha]$.

Finalement,

$$\boxed{\mathbb{Q}[\alpha] \text{ est un corps.}}$$

10 . a) Notons $A = \{\deg P,\ P \in I_\alpha\ ;\ P \neq 0\}$.

- $A \subset \mathbb{N}$.
- D'après la question **1.**, comme α est algébrique, $A \neq \emptyset$.

Ainsi, il existe $P_0 \in I_\alpha$ non nul tel que $\deg P_0$ soit minimal. Notons π_α le polynôme unitaire obtenu en divisant P_0 par son coefficient dominant. Alors,

$$\boxed{\forall\ Q \in I_\alpha \text{ unitaire},\ \deg Q \geq \deg \pi_\alpha.}$$

Soit $Q \in I_\alpha$ unitaire tel que $\deg Q = \deg \pi_\alpha$. Posons $R = Q - \pi_\alpha$. Comme Q et π_α sont unitaires, alors $\deg R < \deg \pi_\alpha$. De plus, $R(\alpha) = 0$. Ainsi, $R = 0$ et $Q = \pi_\alpha$.
Finalement,

$$\boxed{\exists\ !\pi_\alpha \text{ unitaire }\ ;\ \forall\ Q \in I_\alpha,\ \deg Q \geq \deg \pi_\alpha.}$$

b) D'après la question **1.**, il existe $P \in \pi_\alpha$ tel que $\deg P = d$. De plus, s'il existe $Q \in I_\alpha$ non nul, de degré q, tel que $Q(\alpha) = 0$, alors la famille $(1, \ldots, \alpha^{q-1})$ est liée. Ainsi,

$$\boxed{\deg \pi_\alpha = d.}$$

c) Soit $(P, Q) \in \mathbb{Q}[\alpha]^2$ tels que $\pi_\alpha = PQ$. Alors, $P(\alpha)Q(\alpha) = 0$. Ainsi, si $P(\alpha) = 0$, alors $P \in I_\alpha$. Ainsi, soit P est nul, soit $\deg P \geq \deg \pi_\alpha$ et $\deg P = \deg \pi_\alpha$. Ainsi, P et π_α sont associés et

$$\boxed{\pi_\alpha \text{ est irréductible.}}$$

d) Si α est une racine double de π_α, alors $\pi'_\alpha(\alpha) = 0$. Ainsi, $\pi'_\alpha \in \mathbb{Q}[X]$, $\pi'_\alpha \in I_\alpha$ et $\deg \pi'_\alpha < \deg \pi_\alpha$, soit $\pi'_\alpha = 0$, ce qui est impossible. Ainsi,

$$\boxed{\alpha \text{ est racine simple de } \pi_\alpha.}$$

11. On raisonne par double implication.

($\Leftarrow$) Évident (mais à rédiger rapidement...)

($\Rightarrow$) Soit $P \in I_\alpha$. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe $(Q,R) \in \mathbb{Q}[X]^2$ tel que $P = Q\pi_\alpha + R$ et $\deg R < \deg \pi_\alpha$. Ainsi, $R(\alpha) = 0$, soit $R \in I_\alpha$ et $\deg R < \deg \pi_\alpha$, donc $R = 0$. D'où $\pi_\alpha | P$.

Finalement,

$$\boxed{P \in I_\alpha \iff \pi_\alpha | P.}$$

12. Montrons que $X^3 - 5$ est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$. Soit $(P,Q) \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $X^3 - 5 = PQ$ et P, Q non associés à $X^3 - 5$. Alors, un des polynômes est de degré 1. Or, les racines de $X^3 - 5$ sont $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[3]{5}j$ et $\sqrt[3]{5}j^2$. Ces racines ne sont pas dans $\mathbb{Q}$. On obtient ainsi une contradiction et $X^3 - 5$ est irréductible.

Comme $\pi_{\sqrt[3]{5}}$ divise $X^3 - 5$ et $X^3 - 5$ est irréductible, alors $\pi_{\sqrt[3]{5}} = X^3 - 5$ et

$$\boxed{\sqrt[3]{5} \text{ est algébrique de degré } 3.}$$

13. Conséquence immédiate de la question **7.**

14. Par définition, $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est un espace vectoriel. La stabilité par multiplication est identique à celle du **8.a)**.

15. Soit $x \in \mathbb{Q}[\alpha, \beta]$. Comme $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est un espace vectoriel de dimension finie, disons d, alors la famille $(1, \dots, x^d)$ est liée et x est algébrique. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{Q}[\alpha, \beta] \subset \overline{\mathbb{Q}}.}$$

16. Cf. question **8.b)**, il faut introduire la fonction f_β.

17. Montrons que $\overline{\mathbb{Q}}$ est un corps.

- $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$.
- $1 \in \overline{\mathbb{Q}}$.
- Soit $(\alpha, \beta) \in \overline{\mathbb{Q}}$. Alors, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}[\alpha, \beta]^2$ et, d'après la question précédente,
  - $\alpha - \beta \in \mathbb{Q}[\alpha, \beta] \subset \overline{\mathbb{Q}}$,
  - $\alpha \cdot \beta \in \mathbb{Q}[\alpha, \beta] \subset \overline{\mathbb{Q}}$,
  - $\alpha^{-1} \in \mathbb{Q}[\alpha, \beta] \subset \overline{\mathbb{Q}}$.

Finalement,

$$\boxed{\overline{\mathbb{Q}} \text{ est un corps.}}$$

18. Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Notons $S = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ et C_S le plus petit commun multiple des dénominateurs des $(a_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$. Alors,

$$\begin{aligned} |S(r)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\frac{p}{q}\right)^k \right| \\ &= \frac{1}{q^n C_S} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k C_s p^k q^{n-k} \right| \\ &\geq \frac{1}{q^n C_S}, \end{aligned}$$

car $\left| \sum\limits_{k=0}^{n} a_k C_s p^k q^{n-k} \right| \in \mathbb{N}^\star$. En effet, S est irréductible sur $\mathbb{Q}$ et de degré supérieur à 2, donc il n'admet pas de racine rationnelle. Finalement,

$$\boxed{\exists\, C_S\ ;\ \forall\, r=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q},\ |S(r)|\geq\frac{1}{C_Sq^n}.}$$

19. Comme S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[\alpha-1,\alpha+1]$, d'après l'inégalité des accroissements finis, S est lipschitzienne sur $[\alpha-1,\alpha+1]$. Ainsi, il existe un réel $k>0$ tel que pour tout $r\in[\alpha-1,\alpha+1]$,

$$|S(r)-S(\alpha)|\leq k|r-\alpha|.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall\, r=\frac{p}{q}\in[\alpha-1,\alpha+1],\ |\alpha-r|\geq\frac{1}{kC_Sq^n}.}$$

20 . a) La suite (t_n) est croissante. De plus, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $10^{-k!}\leq 10^{-k}$. Ainsi, comme la somme de la suite géométrique $(10^{-k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge, alors

$$\boxed{(t_n)_{n\in\mathbb{N}}\text{ est convergente.}}$$

b) Soit $(p,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que $n<p$. Alors,

$$\begin{aligned}|t_p-t_n| &= \sum_{k=n+1}^{p}10^{k!}\\ &\leq 10^{-(n+1)!}\sum_{k=0}^{p-n+1}10^{-k}\\ &\leq 2\cdot 10^{-(n+1)!}.\end{aligned}$$

Finalement, comme (t_p) converge vers t, alors

$$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N},\ |t-t_n|\leq 2\cdot 10^{-(n+1)!}.}$$

c) Supposons par l'absurde que t soit algébrique de degré supérieur à 2. Alors, à partir d'un certain rang, $t_n\in[t-1,t+1]$ et

$$|t_n-t|\geq\frac{K}{10^{-n\cdot n!}}.$$

Ainsi, en utilisant la question précédente, on obtient une contradiction et

$$\boxed{t\text{ est un nombre transcendant.}}$$