



L'usage des calculatrices est interdit.

Un grand soin devra être apporté à la rédaction.

Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.



Notations. Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E et Id l'application identité de E . Le produit de deux endomorphismes de E sera parfois noté fg . Pour tout élément x d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, $\mathbb{K} \cdot x$ désigne le sous-espace vectoriel engendré par x .

Dans tout le problème, H désigne un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$, stable par composition, i.e.

$$\forall f, g \in H, f \circ g \in H.$$

Partie I : $\text{Id} \in H$

On souhaite montrer dans cette partie que $\text{Id} \in H$. Pour cela, on suppose par l'absurde que $\text{Id} \notin H$.

1. a) Montrer que H et $\mathbb{K} \cdot \text{Id}$ sont supplémentaires dans $\mathcal{L}(E)$.

b) Soit p la projection sur $\mathbb{K} \cdot \text{Id}$ parallèlement à H . Montrer que pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E)$, $p(fg) = p(f)p(g)$.

2. Montrer que si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $f^2 \in H$, alors $f \in H$.

3. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note $f_{i,j}$ l'élément de $\mathcal{L}(E)$ défini par

$$\begin{cases} f_{i,j}(e_j) &= e_i, \\ f_{i,j}(e_k) &= 0_E, \forall k \neq j. \end{cases}$$

a) Calculer $f_{i,j} \circ f_{k,\ell}$.

b) Montrer que $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow f_{i,j} \in H$.

c) En déduire que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_{i,i} \in H$.

4. Conclure.

Partie II : Généralités sur la dimension 2

Dans cette partie, on suppose que $\dim E = 2$. Ainsi, H est une sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension 3, stable par composition.

5. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) ; fg = gf\}$.

a) Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est un espace vectoriel stable par composition.

b) Déterminer la dimension de $\mathcal{C}(f)$ lorsque f est une homothétie.

c) On suppose que f n'est pas une homothétie. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0, f(x_0))$ soit libre. En déduire la dimension de $\mathcal{C}(f)$.

d) Montrer que Id , f et f^2 sont liés.

6. a) Montrer qu'il existe une base de H de la forme $(\text{Id}, \varphi, \psi)$ avec $\psi\varphi \neq \varphi\psi$.

- b) Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{K}^3$ tel que $\varphi\psi = \lambda\varphi + \mu\psi + \nu \text{Id}$.
- c) Montrer que $(\varphi - \mu \text{Id})(\psi - \lambda \text{Id}) = 0$.
- d) Montrer qu'il existe une base de H de la forme $(\text{Id}, \varphi_1, \psi_1)$ avec $\varphi_1\psi_1 = 0$.
7. Soit $(\text{Id}, \varphi_1, \psi_1)$ une base de H telle que $\varphi_1\psi_1 = 0$.
- a) Montrer que les endomorphismes φ_1 et ψ_1 sont de rang 1.
- b) Montrer que φ_1 et ψ_1 ont un vecteur propre commun.
- On rappelle que $x \in E$ est un vecteur propre de φ_1 si $x \neq 0_E$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi_1(x) = \lambda x$.

Partie III : Opérateur de dérivation en dimension 2

On suppose toujours que $\dim E = 2$.

Étant donnée une partie X de $\mathcal{L}(E)$, on admettra qu'il existe un unique plus petit sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ stable par composition. Cet espace vectoriel est appelé sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par X .

8. Soit X un sous-ensemble non vide de $\mathcal{L}(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. X est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension 3 stable par composition.
2. Il existe une droite D de E telle que $X = \{f \in \mathcal{L}(E) ; f(D) \subset D\}$.
3. Il existe une base (e_1, e_2) de E telle qu'un endomorphisme de E appartient à X si et seulement si la matrice de f dans (e_1, e_2) est triangulaire supérieure.

9. Soient f et g deux éléments linéairement indépendants de $\mathcal{L}(E)$ tels que $f^2 = g^2 = 0$. Montrer que la sous-algèbre engendrée par f et g est $\mathcal{L}(E)$.

On pourra montrer successivement que cette sous-algèbre n'est ni de dimension 2, ni de dimension 3.

10. On note d l'ensemble des éléments Δ de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ tels que

$$\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E), \Delta(fg) = \Delta(f)g + f\Delta(g).$$

- a) Montrer que d est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.
- b) À tout élément $f_0 \in \mathcal{L}(E)$, on associe l'élément $\varphi(f_0)$ de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ défini par

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \varphi(f_0)(f) = f_0f - ff_0.$$

Montrer que φ est une application linéaire de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ et déterminer $\text{Ker } \varphi$. Montrer que $\text{Im } \varphi \subset d$.

11. Soit (e_1, e_2) une base de E , et, pour tout $(i, j) \in \{1, 2\}^2$, les applications linéaires $f_{i,j}$ définies par

$$\begin{cases} f_{i,j}(e_j) &= e_i, \\ f_{i,j}(e_k) &= 0, \forall k \neq j. \end{cases}$$

a) Soit $\Delta \in d$. Montrer qu'il existe trois scalaires x, y, z tels que, dans la base (e_1, e_2) , les matrices de $\Delta(f_{1,2})$ et $\Delta(f_{2,1})$ soient respectivement $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} z & 0 \\ -y & -z \end{pmatrix}$.

b) À l'aide de l'application de d dans $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ définie par $\Delta \mapsto (\Delta(f_{1,2}), \Delta(f_{2,1}))$, montrer que $\dim d = 3$. En déduire que $\text{Im } \varphi = d$.