■ ■ ■

Dans ce problème, on montre que pour tout entier naturel n non nul et pour tous réels strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$,

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

$\left(\prod_{i=1}^{k} x_i\right)^{1/k}$ est appelée moyenne géométrique et cette inégalité précédente est l'inégalité arithmético-géométrique.

Partie I : Une première preuve

1 . a) Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n et pour tout $(x_1, \ldots, x_{2^n}) \in (\mathbb{R}_+)^{2^n}$,

$$\left(\prod_{i=1}^{2^n} x_i\right)^{1/2^n} \leqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{2^n} x_i}{2^n}.$$

2. Soient n un entier naturel non nul et $(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^\star)^n$. On note $m = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ la moyenne arithmétique des nombres $x_1, \ldots, x_n$.

a) Montrer que $2^n \geqslant n$.

b) On pose $x_{n+1} = \cdots = x_{2^n} = m$. En utilisant les questions précédentes, montrer l'inégalité arithmético-géométrique.

Partie II : Une deuxième preuve

3. Montrer que pour tout x réel, $x \leqslant e^{x-1}$.

4. Soient n un entier naturel non nul et $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. En notant $m = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ et en considérant les réels $\frac{x_1}{m}, \ldots, \frac{x_n}{m}$, montrer l'inégalité arithmético-géométrique.