■ ■ ■

La fonction cotangente est définie par le rapport $\text{cotan} = \frac{\cos}{\sin}$.

Théorème 1 (Provisoirement admis).

Soient n est un entier naturel, $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que $a_n \neq 0$ et $P \;:\; x \mapsto a_n x^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$ un polynôme de degré n. Le polynôme P possède au plus n racines et si $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ sont les racines du polynôme P, alors $P(x) = a_n \prod_{k=1}^{n} (x - \zeta_k)$.

1. Étude de fonction.

a) Déterminer le domaine de définition puis la parité de la fonction cotan.

b) Déterminer le domaine de dérivabilité puis la valeur de la dérivée de la fonction cotan.

c) En déduire le tableau de variations de la fonction cotan sur $]-\pi, \pi[$, puis sa représentation graphique.

2. Quelques formules trigonométriques. Soient x, y deux réels.

a) Exprimer $\text{cotan}(x+y)$ en fonction de $\text{cotan}\, x$ et $\text{cotan}\, y$, lorsque ces quantités sont définies.

b) Exprimer $\text{cotan}\, x - 2\,\text{cotan}(2x)$ en fonction de $\tan x$, lorsque ces quantités sont définies.

3. Bijection réciproque.

a) Justifier l'existence d'une bijection réciproque de la fonction cotangente à valeurs dans $]0, \pi[$. Préciser son domaine de définition et sa monotonie. Celle-ci sera notée acotan.

b) Préciser le domaine de définition et la valeur de la dérivée de la fonction acotan.

c) Pour tout $x \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$, déterminer les valeurs $\text{cotan}(\text{acotan}(x))$ et $\text{acotan}(\text{cotan}(x))$.

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\sin \text{acotan}(x)$.

4. Calcul d'une somme.

Soit m un entier naturel et x un réel.

a) Montrer que

$$\sin\{(2m+1)x\} = (\sin x)^{2m+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k (\text{cotan}\, x)^{2m-2k}.$$

b) On considère le polynôme : $P_m = \sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k X^{m-k}$.

Déterminer le terme de plus haut degré de P_m puis démontrer que l'ensemble des racines de P_m est $\left\{\text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2m+1}, \, k \in [\![1, m]\!]\right\}$.

c) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{m} \text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{2m(2m-1)}{6}.$$

d) En définissant la fonction cosécante par $\csc = \frac{1}{\sin}$, en déduire que $\sum_{k=1}^{m} \csc^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m+2)}{3}$.

e) Montrer que pour tout $y \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $\text{cotan}^2 y < \frac{1}{y^2} < \csc^2 y$.

f) En déduire un encadrement de $\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2}$.

g) Conclure en montrant que la suite $\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2}\right)_{m \in \mathbb{N}^\star}$ converge et préciser sa limite.