Devoir à la Maison

Construction d'un pentagone régulier & Billard circulaire

à rendre le 04 novembre 2013

■ ■ ■

Exercice 1. (Tracé d'un pentagone régulier) Le plan complexe est reporté au repère orthonormal $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Soit $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. On pose $\alpha = z_0 + z_0^4$ et $\beta = z_0^2 + z_0^3$.

1. Montrer que α et β sont solutions de l'équation $z^2 + z - 1 = 0$.

2. Exprimer α en fonction du réel $\cos\frac{2\pi}{5}$ et en déduire la valeur de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

3. Pour tout $k \in [\![0, 4]\!]$, on note A_k le point d'affixe z_0^k. Soit H le milieu du segment $[A_1A_4]$. Montrer que $OH = \cos\frac{2\pi}{5}$.

4. Soient Ω (resp. B) le point d'affixe $-1/2$ (resp. i). On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre Ω passant par le point B.

a) Calculer le rayon du cercle $\mathscr{C}$.

b) Ce cercle coupe l'axe des abscisses en deux points notés M et N. On appellera M le point d'abscisse positive. Montrer que $OM = |\alpha|$.

c) En déduire que H est le milieu du segment $[OM]$.

5. Étant donné le cercle de centre O et de rayon 1, proposer une construction à la règle non graduée et au compas du polygône $A_0A_1A_2A_3A_4$ appelé pentagone régulier.

Problème. (Rebonds dans un billard circulaire) On considère dans un plan horizontal un billard circulaire de rayon 1. On l'identifie au disque unité $\mathbb{D}$ du plan complexe

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| \leqslant 1\}.$$

Le bord Γ du billard s'identifie donc au cercle unité de centre O,

$$\Gamma = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| = 1\}.$$

Une boule de billard, supposée ponctuelle, est lancée à l'instant $t = 0$ d'un point M_0 du bord du billard d'affixe z_0. On lui transmet une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ de norme 1. L'angle orienté entre $\overrightarrow{M_0O}$ et $\overrightarrow{v_0}$ a pour mesure un nombre réel α tel que $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
On suppose que le mouvement de la boule se produit sans frottement. Ainsi, entre deux chocs successifs sur le bord, son mouvement est supposé rectiligne uniforme.
On suppose que les chocs de la boule sur le bord sont des réflexions élastiques, c'est-à-dire en notant M le point du bord du billard où se produit la collision et $\overrightarrow{v_-}$ (resp. $\overrightarrow{v_+}$) le vecteur vitesse avant (resp. après collision),

* $\|\overrightarrow{v_-}\| = \|\overrightarrow{v_+}\|$ (la collision est élastique),
* $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{v_-}) = (\overrightarrow{v_+}, \overrightarrow{MO})$ (la collision est une réflexion).

1. Représenter schématiquement la trajectoire $M_0M_1M_2M_3$ de la bille de billard entre l'instant $t = 0$ et l'instant de la troisième collision avec le bord. On mettra en évidence l'angle α.

2. Montrer qu'il existe un nombre complexe $\beta \in]0, 2\pi[$ tel que la boule de billard rebondit sur le bord Γ en les points M_n, $n \in \mathbb{N}^\star$ d'affixes $z_n = z_0e^{in\beta}$. On exprimera β en fonction de α.

3 . a) Soit $j \in \mathbb{N}^\star$. Calculer le temps mis par la boule pour parcourir la corde M_jM_{j+1}.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. En déduire le temps mis pour atteindre le point M_n.

c) Trouver l'affixe $z(t)$ de la position $M(t)$ de la boule à l'instant t. On notera $\lfloor y \rfloor$ la partie entière de y, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur à y.

4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que le mouvement de la boule soit périodique. Sous cette condition, calculer la période du mouvement.