Devoir à la Maison

Limites supérieures et Limites inférieures

à rendre le mardi 12 novembre 2013

MPSI 1 — 2h

■ ■ ■

Sauf mention contraire, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne une suite réelle bornée.

1. Pour tout entier naturel p, on note $U_p = \{u_n,\, n \geqslant p\}$. Montrer que U_p admet une borne inférieure et une borne supérieure. Nous les noterons respectivement $i_p = \inf\limits_{n\geqslant p} u_n$ et $s_p = \sup\limits_{n\geqslant p} u_n$.

2. Montrer que les suites $(i_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(s_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. Nous noterons respectivement leurs limites $\limsup u = \lim\limits_{p\to\infty} \sup\limits_{n\geqslant p} u_n$ et $\liminf u = \lim\limits_{p\to\infty} \inf\limits_{n\geqslant p} u_n$.

3. Exemples. Déterminer les valeurs de $\limsup u$ et $\liminf u$ pour les suites suivantes (votre réponse sera argumentée).

a) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n$.

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.

c) $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

d) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin(n)$.

4. Lien avec la notion de limite. Soit ℓ un réel.

a) Montrer que pour tout $n \geqslant p$, $i_p \leqslant u_n \leqslant s_p$.

b) En déduire que $\limsup u = \liminf u = \ell$ si et seulement si la suite u converge vers ℓ.

5. Le théorème de Bolzano-Weierstrass.

a) Montrer qu'il existe une sous-suite de u qui converge vers $\limsup u$.

b) En déduire une nouvelle démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass.

6. La complétude de $\mathbb{R}$. Dans cette question, la suite u n'est pas supposée bornée. On suppose que la suite u est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ ;\ \forall\, n,\, p \geqslant n_0,\ |u_n - u_p| \leqslant \varepsilon.$$

a) Montrer que $(s_p - i_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

b) En déduire que la suite u converge.