■ ■ ■

Pour tous a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, on définit la matrice

$$M(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}.$$

On note $\mathbb{H} = \left\{M(a,b,c,d),\, (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\right\}$.

1. Structure I.

a) Montrer que $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ est un sous-anneau de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

b) Cet anneau est-il commutatif ?

2. Morphisme. On note $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{H}$, $a + ib \mapsto M(a,b,0,0)$.

a) Montrer que φ est un morphisme d'anneaux.

b) Montrer que φ est injectif.

On note abusivement $i = M(0,1,0,0)$, puis $j = M(0,0,1,0)$ et $k = (0,0,0,1)$.

c) Calculer i^2, j^2 et k^2.

On admettra (résultat qui se montre sans difficulté) que

$$jk = -kj = i,\ ki = -ik = j,\ ij = -ji = k.$$

Pour tout $q = aI_4 + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, on définit

$$\begin{aligned} \overline{q} &= aI_4 - bi - cj - dk \\ N(q) &= q \cdot \overline{q}. \end{aligned}$$

On note $\mathbb{P} = \{bi + cj + dk,\, (b,c,d) \in \mathbb{R}^3\}$.

3. Structure II.

a) Exprimer simplement $N(q)$ en fonction de a, b, c, d.

b) Traduire matriciellement l'application $q \mapsto \overline{q}$.

c) Montrer que pour tous q, $q' \in \mathbb{H}$, $N(q \cdot q') = N(q)N(q')$.

d) En déduire que tout élément non nul de $\mathbb{H}$ est inversible. On dira que $\mathbb{H}$ est un *corps non commutatif*.

On note $\widetilde{\mathbb{R}} = \{a \cdot I_4,\, a \in \mathbb{R}\}$, $\widetilde{\mathbb{R}_+} = \{a \cdot I_4,\, a \in \mathbb{R}_+\}$ et $\widetilde{\mathbb{R}_-} = \{a \cdot I_4,\, a \in \mathbb{R}_-\}$.

4. Centre. Le centre de $\mathbb{H}$, noté $Z(\mathbb{H})$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{H}$ qui commutent avec tous les éléments de $\mathbb{H}$.

a) Montrer que $Z(\mathbb{H}) = \widetilde{\mathbb{R}}$.

b) Montrer que ($q \in \widetilde{\mathbb{R}}$ si et seulement si $q^2 \in \widetilde{\mathbb{R}_+}$) et ($q \in \mathbb{P}$ si et seulement si $q^2 \in \widetilde{\mathbb{R}_-}$).