Devoir à la Maison

Développement limité et Polynômes de Bernoulli

à rendre le lundi 13 janvier 2014

■ ■ ■

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ et $f(0) = 1$.

Partie I : Étude de fonction

1. Étude de la régularité de la fonction f.

a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^\star$, calculer $f'(x)$.

b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

2. Comportement de la fonction f.

a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ et préciser la nature des branches infinies ainsi que leur position par rapport à la courbe représentative de f.

b) Dresser le tableau des variations de f.

Partie II : Développements limités

Soit n un entier naturel non nul.

3. Déterminer le développement limité de $\frac{e^x-1}{x}$ à l'ordre n en 0.

4. En déduire (sans le calculer) que f admet un développement limité d'ordre n en 0.
On notera dans toute la suite $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!} x^k + o(x^n)$ ce développement limité.

5. Déterminer le développement limité de f à l'odre 3 en 0. En déduire b_0, b_1, b_2, b_3.

6. Une relation de récurrence sur les $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) En remarquant que $x = f(x)(e^x - 1)$, montrer que pour tout $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = 0.$$

b) En déduire une formule de récurrence permettant le calcul de b_n.

Partie III : Étude d'une suite de polynômes

Pour tout $n \geqslant 0$, on pose $B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$. B_n est appelé le n-ème polynôme de Bernoulli.
On utilisera des notations identiques pour polynômes et fonctions polynomiales associées.

7. Déterminer B_0, B_1, B_2 en explicitant les coefficients.

8. Soit $n \geqslant 2$. Montrer les égalités suivantes.

a) $B_n(0) = B_n(1)$.

b) $B_n'(X) = nB_{n-1}(X)$.

c) $\int_0^1 B_n(x)\,dx = 0$.

9. Pour tout $n \geqslant 0$, posons $Q_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$.

a) Montrer que $Q_0(X) = B_0(X)$.

b) Pour tout $n \geqslant 2$, calculer $Q_n'(X)$.

c) En déduire que pour tout $n \geqslant 0$, $Q_n(X) = B_n(X)$.

d) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $b_{2n+1} = 0$.