■ ■ ■

Soient a, b deux réels tels que $a < b$ et f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Pour toute fonction continue $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, on note $\|g\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |g(x)|$.

1. Montrer que cette quantité est bien définie.
Soient n un entier naturel et $(x_0, \ldots, x_n) \in [a, b]^{n+1}$ des réels deux à deux distincts. On note,

$$\forall\ x \in [a, b], q_n(x) = \prod_{j=0}^{n}(x - x_j).$$

2. Montrer qu'il existe une constante $M_0 \in \mathbb{R}$ (indépendante des $(x_i)_{i\in[\![0,n]\!]}$) telle que

$$\|q_n\|_\infty \leqslant M_0^{n+1}.$$

Pour tout entier $i \in [\![0, n]\!]$, on note $L_i : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \prod_{j\in[\![0,n]\!],\, j\neq i} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$. On rappelle qu'il existe un polynôme P_n de degré au plus n tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P_n(x_i) = f(x_i)$. Il sera appelé polynôme d'interpolation de Lagrange.

Partie I : Un exemple de convergence uniforme

On suppose dans cette partie que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a, b]$ et que toutes les dérivées de f sont majorées, sur $[a, b]$, par une même constante M.

3. Soit $x \in [a, b]\backslash\{x_0, \ldots, x_n\}$. On note φ la fonction définie par

$$\forall\ u \in [a, b],\ \varphi(u) = f(u) - P_n(u) - \frac{f(x) - P_n(x)}{q_n(x)} q_n(u).$$

Montrer qu'il existe un réel $v \in [a, b]$ tel que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(v)}{(n + 1)!} q_n(x).$$

4. En déduire que la suite $(\|P_n - f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Partie II : Un exemple de divergence

Dans cette partie, on pose $a = -1$, $b = 1$, $f : x \mapsto |x|$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ i \in [\![0, n]\!]$, $x_i = -1 + \frac{2i}{n+1}$.

5. Soient p, q deux entiers naturels tels que $0 \leqslant p < q$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k \binom{q}{k} \frac{q - 2k - 1}{k + 1} = 1 + (-1)^p \binom{q-1}{p} \frac{q - 2p - 2}{p + 1}.$$

6 . a) Soit $m = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$. On pose

$$A(n) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{n}{k} \frac{n - 2k - 1}{k + 1}$$

$$B(n) = \sum_{k=m+1}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} \frac{n - 2k - 1}{k + 1}.$$

b) Calculer $A(n) + B(n)$.

c) Montrer que $P_n(1) = A(n) - B(n)$.

d) En déduire que $P_n(1) = 1 + 2(-1)^m \binom{n-1}{m} \frac{n-2m-2}{m+1}$.

7. Donner un équivalent de $|f(1) - P_{2n+1}(1)|$ lorsque n tend vers l'infini.

8. En déduire que $(\|P_n - f\|_\infty)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.