■ ■ ■

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On note Id_E l'application identité de E dans E et 0 l'application nulle de E dans E. Ces deux applications sont des applications linéaires. Pour toute application linéaire f de E dans E, on note $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et pour tout entier naturel n, $f^{n+1} = f \circ f^n$.

Partie I : Étude d'un cas particulier

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $f : E \to E$, $(x, y, z) \mapsto (x + y, 2y, -x + y + 2z)$.

1. Montrer que f est une application linéaire bijective.

2. Déterminer les réels λ tels que $f - \lambda \, \mathrm{Id}_E$ ne soit pas injective.

3. On pose $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$. Soient les vecteurs $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, 1, 0)$ et $w = (0, 0, 1)$.

a) Déterminer E_1 et E_2 en fonction de u, v et w.

b) En déduire que $E = E_1 \oplus E_2$.

Partie II : Application linéaire et Polynôme annulateur

Dans cette partie, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel quelconque et f est une application linéaire de E dans E telle que $f^2 - 3f + 2\,\mathrm{Id} = 0$. On note $P = X^2 - 3X + 2 \in \mathbb{R}[X]$.

4. On dit qu'un réel λ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur non nul $x \in E$ tel que $f(x) = \lambda x$.

a) Montrer que si λ est une valeur propre de f, alors $P(\lambda) = 0$.

b) En déduire les valeurs propres possibles des valeurs propres de f.

5. On pose $g = f - \mathrm{Id}$ et $h = f - 2\,\mathrm{Id}$.

a) Identifier $g - h$ et en déduire que $E = \mathrm{Im}\, g + \mathrm{Im}\, h$.

b) Identifier $g \circ h$ et $h \circ g$ et en déduire que $\mathrm{Im}\, h \subset \mathrm{Ker}\, g$ et $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Ker}\, h$.

c) Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, g + \mathrm{Ker}\, h$.

d) En déduire que $\mathrm{Ker}\, g$ et $\mathrm{Ker}\, h$ sont supplémentaires dans E.

6 . a) Montrer qu'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n \geqslant 0}$ et $(b_n)_{n \geqslant 0}$ telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ f^n = a_n f + b_n \,\mathrm{Id}\,.$$

b) Pour tout entier naturel n, exprimer f^n en fonction de n, f et Id.