



Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k \text{ fois}}$. On dit que f est un endomorphisme nilpotent s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Dans toute la suite, sauf mention contraire, f et g désignent des endomorphismes nilpotents.

1. On suppose que f est non nul. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul p tel que $f^{p-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $f^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$. L'entier p est appelé l'indice de nilpotence de f . Par convention, l'indice de nilpotence de la matrice nulle vaut 0.
2. On note D l'opérateur de dérivation sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que D est un endomorphisme nilpotent et déterminer son indice de nilpotence.
3. On note p l'indice de nilpotence de f .
 - a) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $x_0 \notin \text{Ker } f^{p-1}$.
 - b) Montrer que la famille $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est une famille libre.
 - c) En déduire que $p \leq n$.
 - d) En déduire que $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
 - e) Lorsque $p = n$, en déduire la matrice de f dans la base \mathcal{B} .
4. Soit f un endomorphisme de E . On suppose que pour tout $x \in E$, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k(x) = 0_E$.
 - a) Montrer que f est un endomorphisme nilpotent.
 - b) Montrer que ce résultat est faux si on ne suppose plus E de dimension finie.
5. On suppose que f et g commutent. Montrer que $f \circ g$ et $f + g$ sont des endomorphismes nilpotents.
6. On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur $x \in E$ non nul tel que $f(x) = \lambda x$. Montrer que si λ est une valeur propre de f , alors $\lambda = 0$.

7. Décomposition de Jordan des endomorphismes nilpotents - Question difficile.

a) Montrer qu'il existe une base $\tilde{\mathcal{B}}$ de E telle que la matrice de f dans la base $\tilde{\mathcal{B}}$ soit de la

forme $\begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{pmatrix}$, où, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, la matrice J_i est une matrice carrée de la forme

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}. \text{ Les matrices } J_i \text{ sont appelés blocs de Jordan.}$$

b) Relier la dimension du noyau de f à l'entier r .