Devoir à la Maison

Nombres algébriques
à rendre le 28 mai 2014

■ ■ ■

Soit z un nombre complexe. On dit que z est algébrique s'il existe un polynôme non nul P à coefficients dans $\mathbb{Q}$ tel que $P(z) = 0$. Un nombre complexe qui n'est pas algébrique est dit transcendant. On note $\overline{\mathbb{Q}}$ l'ensemble des nombres algébriques.
Dans tout le problème, $\mathbb{C}$ est considéré comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, c'est-à-dire que les scalaires sont toujours des nombres rationnels.

Partie I : Nombres algébriques

1. Montrer que $\alpha \in \mathbb{C}$ est algébrique si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que la famille $(1, \alpha, \dots, \alpha^p)$ soit liée.
Soit α un nombre algébrique et d le plus petit des entiers naturels $p \geqslant 1$ tels que la famille $(1, \alpha, \dots, \alpha^p)$ soit liée. On dit que d est le *degré* de α.

2. Caractériser les nombres algébriques de degré 1.

3. Montrer que $\sqrt{3}$ est algébrique de degré 2.

4. Le nombre complexe i est-il algébrique ? Si oui, quel est son degré ?

5. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que α est algébrique de degré 2 si et seulement si α est racine d'un trinôme $X^2 + mX + p \in \mathbb{Q}[X]$ dont le discriminant $\Delta = m^2 - 4p$ n'est pas le carré d'un nombre rationnel.

Partie II : $\mathbb{Q}[\alpha]$ sous-corps de $\mathbb{C}$

Soit α un nombre algébrique de degré d. On note $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathrm{Vect}\{1, \alpha, \dots, \alpha^{d-1}\}$.

6. Montrer que $(1, \alpha, \dots, \alpha^{d-1})$ est une base de $\mathbb{Q}[\alpha]$.

7. Montrer que pour tout entier naturel n, $\alpha^n \in \mathbb{Q}[\alpha]$.

8. Pour tout $\beta \in \mathbb{Q}[\alpha]$, on définit $f_\beta : \mathbb{Q}[\alpha] \to \mathbb{Q}[\alpha]$ par $f_\beta(z) = \beta z$.

a) Montrer que f_β est bien définie.

b) Montrer que si $\beta \neq 0$, alors f_β est un automorphisme d'espace vectoriel.

9. Déduire de la question précédente que $\mathbb{Q}[\alpha]$ est un corps.

Partie III : Polynôme minimal

Soit α un nombre algébrique de degré d. On note $I_\alpha = \{P \in \mathbb{Q}[X]\ ;\ P(\alpha) = 0\}$.

10 . a) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $\pi_\alpha \in I_\alpha$ tel que pour tout $Q \in I_\alpha$, $\deg \pi_\alpha \leqslant \deg Q$. Ce polynôme s'appelle le *polynôme minimal* de α.

b) En déduire que $\deg \pi_\alpha = d$.

c) Montrer que π_α est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

d) Montrer que α est une racine simple de π_α.

11. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$. Montrer que $P \in I_\alpha$ si et seulement si π_α divise P.

12. Montrer que $X^3 - 5$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$. En déduire que $\sqrt[3]{5}$ est algébrique de degré 3.

Partie IV : Le corps $\overline{\mathbb{Q}}$

Soient α un nombre algébrique de degré p et β un nombre algébrique de degré q. On note $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ engendré par $\left\{\alpha^k \beta^n,\, n,\, k \in \mathbb{N}\right\}$.

13. Montrer que la famille $(\alpha^k \beta^n)_{0 \leqslant k \leqslant p-1,\, 0 \leqslant n \leqslant q-1}$ est une partie génératrice de $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$.

14. Montrer que $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ stable par multiplication interne.

15. En déduire que $\mathbb{Q}[\alpha, \beta] \subset \overline{\mathbb{Q}}$.

16. Montrer que $\mathbb{Q}[\alpha, \beta]$ est un corps.

17. En déduire que $\overline{\mathbb{Q}}$ est un corps.

Partie V : Nombres de Liouville

On cherche à montrer que $\overline{\mathbb{Q}} \neq \mathbb{C}$. Soit S un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ irréductible de degré $n \geqslant 2$.

18. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul C_S tel que pour tout $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (où $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$),

$$|S(r)| \geqslant \frac{1}{C_S q^n}.$$

19. On suppose que S admette une racine réelle α. Montrer qu'il existe une constante strictement positive K telle que pour tout $r = \frac{p}{q} \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$,

$$|\alpha - r| \geqslant \frac{K}{q^n}.$$

20. Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres réels définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $t_n = \sum\limits_{k=0}^{n} 10^{-k!}$.

a) Montrer que la suite (t_n) est convergente. On notera t sa limite.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|t - t_n| \leqslant 2 \cdot 10^{-(n+1)!}.$$

c) En déduire que t est un nombre transcendant.