■ ■ ■

Exercice 1. (Matrice à coefficients entiers) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\det M$ pour que M soit inversible et $M^{-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 2. (Coefficients binomiaux) Soit $p \in \mathbb{N}$ et

$$A_p = \begin{pmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{p} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \cdots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \binom{n+p}{1} & \cdots & \binom{n+p}{p} \end{pmatrix}.$$

On note $\Delta_p = \det A_p$. Montrer que (Δ_p) est une suite constante puis calculer la valeur de Δ_p.

Exercice 3. (Déterminant de Cauchy) Soient n un entier naturel non nul, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$. On suppose que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_i + b_j \neq 0$. On note $\Delta = \det\left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)$.

1. Montrer que s'il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tels que $i \neq j$ et $a_i = a_j$, alors $\Delta = 0$.

2. On suppose que les (a_i) sont tous distincts. On note $a_n = X$ et on considère Δ comme une fraction rationnelle.

a) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que

$$\Delta(X) = \frac{P(X)}{\prod_{i=1}^{n}(X+b_i)}.$$

b) À l'aide de la question **1.**, déterminer les racines de P.

c) Évaluer $(X+b_n)F$ en $-b_n$.

d) En déduire la valeur de Δ.

3. Déterminer le déterminant de Cauchy lorsque pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $a_i = b_i = i$.

4. On suppose que $a_i = b_i - 1 = i - 1$. Montrer que l'inverse de $H = \left(\frac{1}{a_i+b_j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est inversible et que son inverse est à coefficients entiers. Cette matrice est appelée matrice de Hilbert.

Exercice 4. (Un peu d'arithmétique) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $\psi : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{R}$. Si pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,j} = \sum_{k|i \text{ ET } k|j} \psi(k)$.

a) Soit $B = (b_{i,j})$ telle que $b_{i,j} = 1$ si $i|j$ et 0 sinon. Déterminer $\det B$.

b) Soit $C = (c_{i,j})$ telle que $c_{i,j} = \psi(i)\delta_{i,j}$, où δ est le symbole de Kronecker. Calculer ${}^tBCB$.

c) En déduire la valeur de $\det A$.

2. En déduire les valeurs de $\det A$ lorsque

a) $a_{i,j}$ est le nombre de diviseurs communs à i et j.

b) $a_{i,j}$ est la somme des diviseurs communs à i et j.

c) $a_{i,j}$ est le plus grand diviseur commun de i et j.

On pourra faire intervenir la fonction indicatrice d'Euler.