Devoir à la Maison

Intégrale de Dirichlet

à rendre le 12 mai 2014

■ ■ ■

Pour tout entier naturel n, on définit sur $\mathbb{R}_+$ les fonctions φ_n, Φ_n et f par

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2nx)\cos x}{\sin x} & , x \notin \pi\mathbb{N} \\ 2n & , x \in \pi\mathbb{N} \end{cases}, \ \Phi_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2nx)}{x} & , x > 0 \\ 2n & , x = 0 \end{cases}, \ f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x > 0 \\ 1 & , x = 0. \end{cases}.$$

1. Soit n un entier naturel.

a) Montrer que les fonctions f, φ_n et Φ_n sont continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt$ existe et appartient à $\mathbb{R}$. Nous la noterons ℓ.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_n(t)\,dt$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que u_n est bien défini.

b) Calculer $u_{n+1} - u_n$ et en déduire la valeur de u_n.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi_n(t)\,dt$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que v_n est bien défini.

b) Étudier la limite lorsque n tend vers l'infini de v_n. Si elle existe, on exprimera cette limite en fonction de ℓ.

4. On suppose que g est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$ et que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels tels que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b g(t)\sin(w_n t)\,dt = 0$.

5. On considère la fonction h définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

6. En déduire la valeur de ℓ.

7. Pour tout réel positif x, on note $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$. On propose de démontrer que f n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$, c'est-à-dire que la fonction F n'admet pas de limite finie en $+\infty$.

a) Montrer que F est croissante et que pour tout entier naturel k, $F((k+1)\pi) - F(k\pi) \geqslant \frac{2}{(k+1)\pi}$.

b) En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.