■ ■ ■

Partie I : Définition et propriétés

Soient p et q deux entiers naturels non nuls et $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, avec $a_p b_q \neq 0$. Le résultant des polynômes P et Q est le nombre complexe noté $\mathrm{Res}(P,Q)$ défini par

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & b_0 \\ a_p & & a_0 & \vdots & & b_1 \\ & \ddots & a_1 & b_q & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & a_p & & & b_q \end{vmatrix}.$$

C'est un déterminant à $p+q$ colonnes, dont les q premières colonnes représentent les coefficients du polynôme P et les p suivantes représentent les coefficients du polynômes Q ; les positions non remplies étant des zéros.
Par exemple, si $P = 1 + 2X + 3X^2$ et $Q = 4 + 5X + 6X^2 + 7X^3$,

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

La matrice servant à définir $\mathrm{Res}(P,Q)$ pourra être notée $M_{P,Q}$:

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \det M_{P,Q}.$$

On note $E = \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ et $F = \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$. Soit u l'application de E vers F définie pour tout $(A,B) \in E$ par $u(A,B) = PA + QB$.

1. Exprimer $\mathrm{Res}(P,Q)$ en fonction de $\mathrm{Res}(Q,P)$.

2. Cas où u est bijective.

a) Démontrer que u est une application linéaire.

b) Si on suppose que u est bijective, démontrer que P et Q sont premiers entre eux.

c) Si on suppose que P et Q sont premiers entre eux, déterminer $\mathrm{Ker}\, u$ et en déduire que u est bijevtive.

3. Matrice de u.
On note $\mathscr{B} = ((1,0),(X,0),\dots,(X^{q-1},0),(0,1),(0,X),\dots,(0,X^{p-1}))$ une base de E et $\mathscr{B}' = (1,X,\dots,X^{p+q-1})$ la base canonique de F.

a) Déterminer la matrice de u par rapport aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

b) Démontrer que $\mathrm{Res}(P,Q) \neq 0$ si et seulement si P et Q sont premiers entre eux.

4. Racine multiple.

a) Démontrer qu'un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine multiple dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $\mathrm{Res}(P, P') = 0$.

b) *Application.* Soient a, b deux nombres complexes. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que le polynôme $X^3 + aX + b$ admette une racine multiple dans $\mathbb{C}$.

Partie II : Applications

5. Équation de Bézout.
Dans cette question, on note $P = X^4 + X^3 + 1$ et $Q = X^3 - X + 1$.

a) Démontrer, en utilisant la première partie, que les polynômes P et Q sont premiers entre eux.

b) On cherche un couple (A_0, B_0) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tel que $PA_0 + QB_0 = 1$. Expliquer comment on peut trouver un tel couple en utilisant la matrice de u, puis donner un couple solution.

c) Déterminer tous les couples (A, B) de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant $PA + BQ = 1$.

6. Équation de courbe.
On identifiera dans cette question polynômes et fonctions polynomiales. On considère l'ensemble Γ des points M du plans pour lesquels il existe $t \in R$ tel que les coordonnées $(x(t), y(t))$ de M soient

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{t^2+1} \\ y(t) = \frac{3t}{t^4+1} \end{cases}$$

a) Soient A, B, C, D des polynômes à coefficients réels. Pour tout $(x, y, t) \in \mathbb{R}^3$, on pose $P(t) = B(t)x - A(t)$ et $Q(t) = D(t)y - C(t)$. Établir qu'un point M de coordonnées (x, y) appartient à la courbe de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = \frac{A(t)}{B(t)} \\ y(t) = \frac{C(t)}{D(t)} \end{cases}, \ \forall\, t \in \mathbb{R}$$

si et seulement si les polynômes P et Q ont une racine commune.

b) En déduire une équation cartésienne de la courbe Γ.

7. Nombre algébrique.
En utilisant les polynômes $P(X) = X^2 - 3$ et $Q_y(X) = (y - X)^2 - 7$, déterminer un polynôme à coefficients entiers de degré 4 ayant comme racine $\sqrt{3} + \sqrt{7}$. Quelles sont les autres racines de ce polynôme ?