Devoir à la Maison

Autour des marches aléatoires
à rendre le 11 juin 2014

■ ■ ■

Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, S_0 une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, p un réel de $]0,1[$ et $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = -1) = p$. On suppose que S_0 est indépendante des $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^\star}$. On note $q = 1-p$. Pour tout entier naturel n non nul on note

$$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

La suite (S_n) est une marche aléatoire qui peut être représentée dans le plan par la suite de points $\{(n, S_n),\ n \in \mathbb{N}\}$.

Partie I : Généralités

1. Homogénéité spatiale. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $a, j, b \in \mathbb{Z}$.

a) Montrer que

$$\mathbb{P}(S_n = j | S_0 = a) = \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i = j - a).$$

b) En déduire que $\mathbb{P}(S_n = j|S_0 = a) = \mathbb{P}(S_n = j + b|S_0 = a + b)$.

2. Homogénéité temporelle. Soient $n, m \in \mathbb{N}^\star$ et $a, j \in \mathbb{Z}$. Montrer que

$$\mathbb{P}(S_n = j|S_0 = a) = \mathbb{P}(S_{n+m} = j|S_m = a).$$

3. Propriété de Markov. Soient $m \in \mathbb{N}^\star$ et $j \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(S_{m+n} = j|S_0, \ldots, S_m) = \mathbb{P}(S_{m+n} = j|S_m).$$

Partie II : Un cas particulier : Barrières absorbantes

Soit $N \in \mathbb{N}^\star$. On suppose dans cette partie que la marche aléatoire est arrêtée à l'instant n non nul tel que $S_n = 0$ ou $S_n = N$. Formellement,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{n+1} = 0|S_n = 0) &= 1 \\
\mathbb{P}(S_{n+1} = N|S_n = N) &= 1 \\
\mathbb{P}(S_{n+1} = j+1|S_n = j) &= p \text{ si } 0 < \mathrm{j} < \mathrm{N} \\
\mathbb{P}(S_{n+1} = j-1|S_n = j) &= q \text{ si } 0 < \mathrm{j} < \mathrm{N}
\end{aligned}$$

On note p_k la probabilité que la marche aléatoire, issue de k, i.e. telle que $S_0 = k$, s'arrête en rencontrant la barrière N.

4 . a) Calculer p_0 et p_N.

b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, $p_k = p \cdot p_{k+1} + q \cdot p_{k-1}$.

5. En déduire l'expression de p_k en fonction de p, q, N et k.

On note D_k le nombre moyen de pas effectués par la marche aléatoire avant de s'arrêter.

6 . a) Calculer D_0 et D_N.

b) Montrer que pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, $D_k = p(1 + D_{k+1}) + q(1 + D_{k-1})$.

7. En déduire l'expression de D_k en fonction de p, q, N et k.

Partie III : Un cas particulier : Barrière réfléchissante

Soit $N \in \mathbb{N}^\star$. On suppose dans cette partie que la barrière 0 est réfléchissante, i.e.

$$\begin{gathered}\mathbb{P}(S_{n+1} = 0 | S_n = 0) = p \\ \mathbb{P}(S_{n+1} = 1 | S_n = 0) = q \\ \mathbb{P}(S_{n+1} = N | S_n = N) = 1 \\ \mathbb{P}(S_{n+1} = j+1 | S_n = j) = p \text{ si } 0 < \mathrm{j} < \mathrm{N} \\ \mathbb{P}(S_{n+1} = j-1 | S_n = j) = q \text{ si } 0 < \mathrm{j} < \mathrm{N}\end{gathered}$$

On note F_k le temps moyen mis par la marche aléatoire issue de k pour atteindre la barrière N.

8 . a) Calculer $F_N = 0$ et exprimer F_0 en fonction de F_1.

b) Écrire l'équation de récurrence satisfaite par F_k.

9. En déduire l'expression de F_k en fonction de p, q, N et k.

Partie IV : Théorème de Ballot

On suppose dans cette partie que $p = \frac{1}{2}$ et $S_0 = 0$. On note $p_{2n,2k} = \mathbb{P}(S_{2n} = 2k)$.

10 . a) Montrer que

$$p_{2n,2k} = 2^{-2n} \binom{2n}{n+k}.$$

b) En déduire que

$$\frac{2k}{2n} p_{2n,2k} = 2^{-2n} \left[\binom{2n-1}{n+k-1} - \binom{2n-1}{n+k} \right].$$

Soient $a,\ b > 0$. On note $N_n(a,b)$ le nombre de chemins de marche aléatoires issus de a tels que $S_n = b$ et $N_n^0(a,b)$ le nombre de ces chemins qui passent en 0

11. Construire une bijection pour montrer que $N_n^0(a,b) = N_n(-a,b)$.

12. On note $N_n^{\neq 0}(0,b)$ le nombre de chemins qui relient 0 à b en n étapes sans toucher 0 (ailleurs qu'en l'instant 0). Montrer le théorème de Ballot,

$$N_n^{\neq 0}(0,b) = \frac{b}{n} N_n(0,b).$$

13. En utilisant la relation précédente, montrer que si $S_0 = 0$, alors pour tout $n \geqslant 1$ et $b \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{gathered}\mathbb{P}(S_1 \cdots S_n \neq 0,\ S_n = b) = \frac{|b|}{n} \mathbb{P}(S_n = b) \\ \mathbb{P}(S_1 \cdots S_n \neq 0) = \frac{1}{n} \mathbb{E}[|S_n|].\end{gathered}$$

Partie V : Probabilité de la première rencontre

Soit $b > 0$. On note $f_b(n)$ la probabilité que la marche aléatoire S_n issue de 0 rencontre le point b pour la première fois au n-ème pas. On note $T_0 = 0$ et pour tout entier naturel n non nul, $T_n = \sum_{j=0}^{n-1} X_{n-j}$ (où les (X_i) sont ceux du début du problème).

14. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(S_n = b,\, S_1 \cdots S_n \neq 0\right) = \mathbb{P}\left(T_n = b,\, T_n - T_{n-i} > 0,\, \forall\, i \geqslant 1\right).$$

15. En déduire que

$$f_b(n) = \frac{b}{n}\mathbb{P}(S_n = b).$$

Partie VI : Loi de l'arcsinus

On suppose dans cette partie que $p = \frac{1}{2}$. On considère la loi du dernier retour en 0. Soit $L_{2n} = \sup\{m \leqslant 2n \;;\; S_m = 0\}$. On pose $u_{2m} = \mathbb{P}(S_{2m} = 0)$. On considère deux réels $0 < a < b$.

16. Montrer que $\mathbb{P}(L_{2n} = 2k) = u_{2k} \cdot u_{2n-2k}$.

17. Déterminer un équivalent de u_n.

18. Soit $x \neq 0$. Montrer que si (k_n/n) converge vers x, alors

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \mathbb{P}(L_{2n} = 2k_n) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}.$$

19. Déterminer $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\, dx$.

On pourrait alors montrer que $\mathbb{P}(a \leqslant \frac{L_{2n}}{2n} \leqslant b) \to \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\, dx$. Une deuxième loi de l'acsinus apparaît pour le temps passé au-dessus de l'axe des x. En notant $\pi_{2n} = \{k \;;\; S_k \geqslant 0\}$, on pourrait montrer que $\mathbb{P}(\pi_{2n} = 2k) = u_{2k}u_{2n-2k}$ puis que $\mathbb{P}(a \leqslant \frac{\pi_{2n}}{2n} \leqslant b) \to \displaystyle\int_a^b \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\, dx$.

Partie VII : Transience & Récurrence

Une marche aléatoire issue de 0 est dite récurrente si $\mathbb{P}(\exists\, n \in \mathbb{N} \;;\; S_n = 0) = 1$ et transiente sinon. On note R_n le nombre de retours de la marche aléatoire en 0 avant l'instant n.

20. Montrer que $\mathbb{E}[R_n] = \frac{(2n+1)}{4^n}\binom{2n}{n} - 1$.

21. En déduire un équivalent de $\mathbb{E}[R_n]$ lorsque n tend vers l'infini.

On note $\tau_i(S)$ les retours successifs de la marche aléatoire en 0, i.e.

$$\begin{aligned}
\tau_0(S) &= \inf\{n > 0 \;;\; S_n = 0\}\\
\tau_1(S) &= \inf\{n > \tau_1(S) \;;\; S_n = 0\}\\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}$$

22. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_i < +\infty)$.

23. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\tau_n < +\infty) = \mathbb{P}(\tau_1 < \infty)^n$.

24. En déduire que $\mathbb{P}(\tau_1 < +\infty) < 1$ si et seulement si $(\mathbb{E}[R_n])$ converge, puis que la marche aléatoire est récurrente.

25. Montrer que $\mathbb{E}[\tau_1] = +\infty$.

On pourrait continuer ces calculs avec des marches aléatoires dans $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}^3, \ldots$. On peut alors montrer que, en dimension d, $\mathbb{P}(S_n = 0) \sim \frac{c}{n^{d/2}}$ puis que la marche aléatoire est récurrente si et seulement si $d = 1, 2$.