■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la présentation et à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

■ ■ ■

Exercice 1. (Questions diverses)

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)}$.

2. Soient $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\left\lfloor \frac{x+m}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor + m}{n} \right\rfloor.$$

3. Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \cos(\sin x) > \sin(\cos x).$$

4. Soient λ, α, β, γ, δ cinq réels. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda)$ pour que le système suivant possède une infinité de solutions

$$\left\{\begin{array}{r} x + \lambda y = \alpha \\ \lambda x + y = \beta \\ x + \lambda y + z + \lambda t = \gamma \\ x - y + \lambda z + t = \delta \end{array}\right. .$$

Problème. (Calcul différentiel discret)

Partie I : Puissances factorielles descendantes

Pour tout $(x,m) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^\star$, on pose

$$x^{\underline{0}} = 1,\ x^{\underline{m}} = x(x-1)\cdots(x-m+1).$$

Dans toute la suite, m désigne un entier naturel non nul.

1. Soit x un entier tel que $m \leqslant x$. Exprimer $x^{\underline{m}}$ comme un rapport de deux factorielles.

2. Soit x un entier. Exmprimer $x^{\underline{m+1}}$ en fonction de $x^{\underline{m}}$.

3. Formule du binôme. Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{N}^2$,

$$(a+b)^{\underline{m}} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{\underline{k}} b^{\underline{m-k}}.$$

Partie II : Dérivation discrète

Pour tout $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, on pose $\Delta(f) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x+1) - f(x)$. Pour tout entier naturel m, on note $f_m : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{\underline{m}}$.

4. Soit g_0 une fonction constante. Déterminer $\Delta(g_0)$.

5. Soit m un entier naturel. Déterminer $\Delta(f_m)$.

6. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $b_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \binom{x}{k}$. Déterminer $\Delta(b_k)$.
On rappelle que $\binom{x}{k} = 0$ *dès que* $k > x$.

7. Déterminer l'ensemble des fonctions $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout x entier naturel, $\Delta(h)(x) = 0$.

Pour toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, on note $\tau(f) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x+1)$.

8. Soient f, g deux fonctions définies sur $\mathbb{N}$ et λ un réel. Exprimer, en fonction de $\Delta(f)$, $\Delta(g)$, $\tau(f)$ et $\tau(g)$ les quantités $\Delta(\lambda f + g)$ et $\Delta(fg)$.

Partie III : Primitivation discrète

9. Montrer qu'il existe une unique fonction $e : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $e(0) = 1$ et $\Delta(e) = e$.

10. Soit $i : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$. Montrer qu'il existe une fonction H telle que $\Delta(H) = i$.

Soient $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{N}$. On note $\mathscr{P}_g$ l'ensemble des fonctions $G : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telles que $\Delta(G) = g$. Les éléments de $\mathscr{P}_g$ sont des *primitives* de g.

11. Soit $m \in \mathbb{N}$ et $g : x \mapsto \frac{x^{\underline{m}}}{m+1}$. Déterminer $\mathscr{P}_g$. Exprimer $\sum\limits_{k=a}^{b-1} g(k)$ en fonction de $G(a)$ et $G(b)$.

12. Soient m et n deux entiers naturels non nuls.

a) Déterminer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} k^{\underline{m}}$.

b) En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n-1} k$ puis $\sum\limits_{k=0}^{n-1} k^2$.

13. Les nombres de Stirling de seconde espèce sont définis pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geqslant k$ par

$$\begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n \\ n \end{Bmatrix} = 1,\ \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix} + k \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}.$$

Soit m un entier naturel.

a) Montrer que, pour tout x entier naturel, $x^m = \sum\limits_{k=0}^{m} \begin{Bmatrix} m \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}}$.

b) En déduire une formule permettant de calculer, connaissant les nombres de Stirling de deuxième espèce, la somme $\sum\limits_{k=0}^{n-1} k^m$ pour tout couple $(m,n) \in (\mathbb{N}^\star)^2$.