■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la présentation et à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

■ ■ ■

Exercice 1.

1. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$. En calculant, $S_n \cdot \sin \frac{\pi}{2n}$, déterminer une expression de S_n sans signe somme et en fonction de $\tan \frac{\pi}{2n}$.

2. Pour tout $x \in]-1,1]$, simplifier l'expression $\arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \frac{1}{2} \arccos x$.

Exercice 2. Soit n un entier naturel. Si n est non nul, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui associe à un réel x, lorsque c'est possible, le réel $f_n(x) = \frac{\sin(x)}{2-\cos(x)} - \frac{x}{n}$. On note f_0 la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui associe à un réel x, lorsque c'est possible, le réel $f_0(x) = \frac{\sin(x)}{2-\cos(x)}$.

Partie I : Généralités sur f_n

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de f_n.

2. Déterminer la parité de la fonction f_n.

3. Montrer qu'il suffit d'étudier f_n sur $[0, \pi]$ pour tracer sa courbe sur $\mathscr{D}$ tout entier (vous expliciterez les transformations à effectuer).

Partie II : Étude de la fonction f_0

4. Déterminer le tableau de variations de f_0 sur $[0, \pi]$ et tracer l'allure de la courbe de f_0 sur $\mathbb{R}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
On rappelle que $\sqrt{3}$ *a pour valeur approchée* $1,732$ *par défaut à* 10^{-3} *près.*

5. Déterminer les valeurs maximales atteintes par $|f_0(x)|$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}$.

Partie III : Utilisation d'une primitive de f_0

6. Déterminer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(t)}{2-\cos(t)}\, dt$.

On considère l'équation différentielle $(E) \ : \ y'(x) + f_0(x)y(x) = 2\sin(x)$.

7. Déterminer l'ensemble des solutions, définies sur $\mathbb{R}$, de l'équation différentielle (E).

8. Déterminer la fonction h solution de (E) et qui vérifie $h(0) = 1$.

Problème. (Le demi-plan de Poincaré) Le demi-plan de Poincaré est l'ensemble

$$\mathscr{H} = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Partie I : Homographies

1. Soient a, b, c, d quatre réels tels que $ad - bc > 0$.
 a) Montrer que l'application $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ est bien définie sur $\mathscr{H}$.
 b) Montrer que

$$\forall\ z \in \mathscr{H},\ \frac{az+b}{cz+d} \in \mathscr{H}.$$

Une *homographie* de $\mathscr{H}$ est une application de la forme $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ de $\mathscr{H}$ dans $\mathscr{H}$, où a, b, c, d sont quatre réels tels que $ad - bc > 0$.

2. Montrer que la composée de deux homographies de $\mathscr{H}$ est une homographie de $\mathscr{H}$.

Partie II : Distance hyperbolique

3. Montrer que pour tous u, $v \in \mathscr{H}$, $|u - v| < |u - \overline{v}|$, puis que $\frac{|u-\overline{v}|+|u-v|}{|u-\overline{v}|-|u-v|} \geqslant 1$.

Pour tous u, $v \in \mathscr{H}$, la distance hyperbolique entre u et v, notée $d(u,v)$, est définie par $d(u,v) = \ln \frac{|u-\overline{v}|+|u-v|}{|u-\overline{v}|-|u-v|}$.

4. Montrer que pour tout u, $v \in \mathscr{H}$,
 a) $d(u,v) \geqslant 0$.
 b) $d(u,v) = 0 \ \Leftrightarrow\ u = v$.
 c) $d(u,v) = d(v,u)$.

On admettra par ailleurs que pour tous u, v, $w \in \mathscr{H}$, $d(u,w) \leqslant d(u,v) + d(v,w)$.

5. Soient a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc > 0$. On note h l'homographie $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$.
 a) Pour tous u, $v \in \mathscr{H}$, exprimer $h(v) - h(u)$ en fonction de $u - v$, $ad - bc$, $cu + d$ et $cv + d$.
 b) En déduire que pour tous u, $v \in \mathscr{H}$, $d(h(u), h(v)) = d(u,v)$.

Partie III : Géodésiques

Soient z_0, $z_1 \in \mathscr{H}$.

6. On pose $P_0(X) = X^2 - 2\mathscr{R}e\,(z_0)\,X + |z_0|^2$ et $P_1(X) = X^2 - 2\mathscr{R}e\,(z_1)\,X + |z_1|^2$. Pour tout $t \in]0,1[$, on note $P_t(X) = (1-t)P_0(X) + tP_1(X)$ et Δ'_t son discriminant réduit. Dans toute la suite, t désigne un réel de l'intervalle $[0,1]$.
 a) Montrer que pour tout $z \in \mathscr{H}$, $\mathscr{R}e\,(z) < |z|$.
 b) Montrer que $\Delta'_t < -t(1-t)\left(\mathscr{R}e\,(z_0) - \mathscr{R}e\,(z_1)\right)^2$.
 c) En déduire que $P_t(X)$ possède une unique racine dans $\mathscr{H}$, notée z_t.
 d) Exprimer z_t en fonction de $\mathscr{R}e\,(z_0)$, $\mathscr{R}e\,(z_1)$ et Δ'_t.

7. On suppose que $\mathscr{R}e\,(z_0) = \mathscr{R}e\,(z_1)$. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, z_t appartient à la droite verticale qui contient z_0 et z_1.

On peut montrer que z_t décrit le segment qui relie z_0 à z_1 lorsque t décrit $[0,1]$.

8. On suppose que $\mathscr{R}e\,(z_0) \neq \mathscr{R}e\,(z_1)$.
 a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$, exprimer $|z_t - x|^2$ sous la forme $|z_t - x|^2 = \lambda t + \mu$ pour certains λ, $\mu \in \mathbb{R}$ indépendants de t que vous préciserez.
 b) En déduire que pour tout $t \in [0,1]$, z_t appartient à un cercle de centre situé sur l'axe des réels.

On peut montrer que z_t décrit précisément l'arc de cercle qui relie z_0 à z_1 sur le cercle décrit précédemment lorsque t décrit $[0,1]$.