■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la présentation et à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

■ ■ ■

Exercice 1.

1. Soit n un entier naturel. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^n = \overline{z}$.

2. Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. On note $m = \inf A$ et $B = A \cap]-\infty, m+1]$. Déterminer la borne inférieure de B.

3. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $g(\mathbb{R})$ soit bornée, on note

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} g(x) = \sup \{g(x),\, x \in \mathbb{R}\},$$
$$\inf_{x \in \mathbb{R}} g(x) = \inf \{g(x),\, x \in \mathbb{R}\}.$$

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On suppose que $f(\mathbb{R}^2)$ est un ensemble borné. Montrer que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \inf_{y \in \mathbb{R}} f(x,y) \leqslant \inf_{y \in \mathbb{R}} \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x,y).$$

Que pensez-vous de l'inégalité inverse ?

Problème. (Autour de la fonction exponentielle) Dans ce problème, il est **interdit** d'utiliser les fonctions exponentielle et logarithme. L'objectif de ce problème est de construire de façon différente de celle vue en cours ces fonctions.
Pour tout couple $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^\star$, on pose $e_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.
L'ensemble des réels x tels que $(e_n(x))_{n \in \mathbb{N}^\star}$ soit une suite convergente est noté E. Si $x \in E$, on note $e(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} e_n(x)$.

Partie I : Convergence d'une suite

1. Montrer que $0 \in E$ et déterminer $e(0)$.

2. On souhaite montrer l'inégalité de Bernoulli

$$\forall\ (x,k) \in]-1, +\infty[\times \mathbb{N}^\star,\ (1+x)^k \geqslant 1 + kx.$$

a) Soit $y \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} (y^k - 1) = (y-1) \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} y^j.$$

b) En déduire que pour tout $(y,\, n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}$, $y^n - 1 - n(y-1) \geqslant 0$.

c) En déduire l'inégalité de Bernoulli et préciser les cas d'égalité.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note n_x l'entier qui vaut 1 si $x \geqslant 0$ et $\lfloor |x| \rfloor + 1$ si $x < 0$.

3. Monotonie. Soit $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $(e_n(x))_{n \geqslant n_x}$ est une suite à valeurs strictement positives.

b) En utilisant l'inégalité de Bernoulli, montrer que la suite $(e_n(x))_{n \geqslant n_x}$ est croissante.

4. Convergence. Soit $x \in \mathbb{R}^\star$. Pour tout entier naturel $n \geqslant n_x$, on pose $v_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$.

a) Montrer que la suite $(v_n(x))_{n \geqslant n_x}$ est décroissante.

b) Montrer que pour tout $n \geqslant |x|$,

$$0 \leqslant v_n(x) - e_n(x) \leqslant v_n(x) \cdot \frac{x^2}{n}.$$

c) En déduire que la suite $(e_n(x))_{n \in \mathbb{N}^\star}$ converge.

Partie II : Étude de la fonction e

D'après la partie précédente, $E = \mathbb{R}$. On note ainsi $e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e(x)$.

5. Montrer que la fonction e est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\star$.

6. Montrer que e est strictement monotone et préciser sa monotonie.

7. Montrer que

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $1 + x \leqslant e(x)$.

b) $\forall\, x < 1$, $e(x) \leqslant \frac{1}{1-x}$.

8. Montrer que pour tout réel x, $e(x) \cdot e(-x) = 1$.

9. Propriété de morphisme.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$|e_n(x) - 1| \leqslant \frac{|x|}{1 - |x|}.$$

b) En déduire que si $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^\star}$ est une suite réelle de limite nulle, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} e_n(\alpha_n) = 1$.

c) En déduire que

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ e(x)e(y) = e(x + y).$$

Partie III : Régularité

10. Limites. Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite tendant vers $+\infty$.

a) Montrer que la suite $(e(\alpha_n))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite en $+\infty$ et déterminer sa limite.

b) Même question avec la suite $(e(-\alpha_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

c) Soit $m \in \mathbb{N}$. Déterminer, si elle existe la limite de la suite $\left(\frac{e(\alpha_n)}{(\alpha_n)^m}\right)$.

11. Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\left|\frac{e(x) - 1}{x} - 1\right| \leqslant \frac{|x|}{1 - x}.$$

12. En déduire que la fonction e est dérivable en 0 et déterminer $e'(0)$.

13. Montrer que la fonction e est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer e'.

Partie IV : Suite & Série

Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

14. Montrer que pour tout $x > 0$ et pour tout $(n, p) \in (\mathbb{N}^\star)^2$,

$$e_n(x) \leqslant w_n(x) \leqslant e_{n+p}(x).$$

15. En déduire que, pour tout $x > 0$, la suite $(w_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

16. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|w_n(x) - e_n(x)| \leqslant w_n(|x|) - e_n(|x|).$$

17. En déduire que

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} w_n(x) = e(x).$$

Partie V : Question subsidiaire

18. Quelle est la limite de la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$ par $h_n(x) = n(\sqrt[n]{x} - 1)$?