■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la présentation et à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

■ ■ ■

Exercice 1.

1. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \left(\cosh \frac{2}{n}\right)^{n^2}.$$

2. Déterminer un équivalent simple de la suite de terme général

$$v_n = e^{\sqrt{\frac{1}{\ln(n^2)}}} - \cos \frac{1}{n}.$$

Exercice 2. On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| = 1\}$ et $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z| \leqslant 1\}$. Soit $\alpha \in \mathbb{D} \backslash \mathbb{U}$. On considère l'application $\varphi_\alpha : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$.

1. Montrer que φ_α est bien définie sur $\mathbb{D}$.

2. Montrer que $\varphi_\alpha(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

3. Montrer que φ_α réalise une bijection de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$ et exhiber son application réciproque.

4. On note ψ_α la restriction de φ_α à $\mathbb{U}$. Montrer que ψ_α réalise une bijection de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$.

Problème. (Suite récurrente de fonctions)

Partie I : Sommation d'équivalents

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles non nulles à partir d'un certain rang. On suppose que, pour tout n entier naturel, $a_n \geqslant 0$ et $a_n \sim b_n$. Pour tout entier naturel n, on note $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

1. Montrer que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est soit convergente, soit divergente vers $+\infty$.

2. On suppose que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $|B_n - A_n| \leqslant \varepsilon A_n$ à partir d'un certain rang.

b) En déduire que $B_n \sim A_n$ tend vers l'infini.

3. On suppose que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

a) Montrer que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.

b) En déduire que $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

4. Montrer, grâce à la question précédente, que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

Partie II : Étude d'une suite auxiliaire

5. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $\frac{\ln n}{n^2} \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\ln t}{t^2}\, dt$.

6. Déterminer une primitive de la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f \ : \ t \mapsto \frac{\ln t}{t^2}$.

7. En déduire que $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k^2}\right)_{n \geqslant 3}$ est convergente.

Partie III : Étude d'une suite définie par récurrence

Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} + 1$.

8. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

9. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite que vous déterminerez.

10. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n = n + x + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$.

11. Encadrer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis montrer que $u_n \sim n$.

12. Montrer que $u_n - n \sim \ln n$.

13 . a) Déterminer un équivalent simple de la suite de terme général $\frac{1}{n} - \frac{1}{u_n}$.

b) En déduire que la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{u_k}\right)$ converge.

c) Montrer qu'il existe un réel $\varphi(x)$ tel que $u_n = n + \ln n + \varphi(x) + o(1)$.

Pour mettre en évidence la dépendance de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en son terme de départ x, on la notera dans la partie suivante $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie IV : Étude de la fonction φ

14 . a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n\left(x + \frac{1}{x} + 1\right) = u_{n+1}(x)$.

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\varphi\left(x + \frac{1}{x} + 1\right) = \varphi(x) + 1$.

15. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi(x)$.

16 . a) Montrer que pour tous x, $y \in [1, \infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $x \leqslant y \ \Rightarrow \ u_n(x) \leqslant u_n(y)$.

b) En déduire que φ est croissante sur $[1, +\infty[$.

c) Montrer que φ est décroissante sur $]0, 1]$.