■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la présentation et à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

■ ■ ■

Exercice 1. On propose d'étudier quelques propriétés de la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{x+t}\,dt$. On ne cherchera pas à calculer l'intégrale définissant f.

1. Montrer que f est décroissante.

2. Soit x_0 un réel strictement positif.

a) Montrer que

$$\forall\, x \in [\frac{x_0}{2}, +\infty[,\ |f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{2e|x-x_0|}{x_0^2}.$$

b) En déduire que f est continue en x_0.

3. Soit x un réel strictement positif.

a) Montrer que $\frac{e-1}{x+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{e-1}{x}$.

b) En déduire un équivalent simple de $f(x)$ en $+\infty$.

4 . a) Montrer qu'il existe un réel strictement positif M tel que

$$\forall\, t \in [0,1],\ |e^t - 1| \leqslant Mt.$$

b) Montrer que la fonction g définie pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^\star$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^t-1}{x+t}\,dt$ est bornée.

c) En déduire un équivalent simple de f en 0^+.

5. Soient h la fonction définie pour tout réel $t \in [0,1]$ par $h(t) = \frac{e^t}{1+t}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} h\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

a) Montrer que h est monotone et préciser son sens de variations.

b) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\frac{1}{n}h\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} h(t)\,dt \leqslant \frac{1}{n}h\left(\frac{k+1}{n}\right).$$

c) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $\left|f(1) - \frac{u_n+v_n}{2}\right| \leqslant \frac{h(1)-h(0)}{2n}$, puis la limite de $\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}^\star}$.

Problème.
On pose $I =]-1, +\infty[$. Une fonction f est *convexe* sur I si

$$\forall\ (x,y) \in I^2,\ \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Résultat admis. On admettra que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites numériques positives à partir d'un certain rang telles que $u_n \sim v_n$ et $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Partie I : Fonctions convexes

Dans toute cette partie, f désigne une fonction convexe de I dans $\mathbb{R}$.

1. Soient $x < y < z$ trois réels. Montrer qu'il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $y = \lambda x + (1-\lambda) z$.

2. Soient x_1, x_2, $x_3 \in I$ tels que $x_1 < x_2 < x_3$. Montrer que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Illustrer ces inégalités à l'aide d'un dessin.

3. Soit $x \in I$. On pose $\Delta_x\ :\ h \mapsto \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

a) . Montrer que la fonction Δ_x est croissante.

b) En déduire que f est dérivable à droite et à gauche en tout point de I. Pour tout $x \in I$, ces dérivées seront notées respectivement $f'_d(x)$ et $f'_g(x)$.

c) En déduire que f est continue sur I.

4. Si f est convexe et dérivable sur I, montrer que f' est croissante.
On **admettra** que la réciproque est également vraie.

Partie II : Une équation fonctionnelle

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions φ définies sur I, convexes telles que

$$\forall\ x \in I,\ \varphi(x+1) = \varphi(x) + \ln(x+1).$$

5. Montrer que pour tout réel $x \in I$ et tout entier naturel n,

$$\varphi(x) = \varphi(x+n) - \ln\left[\prod_{i=1}^{n} (x+i)\right].$$

6. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\varphi(x) - \varphi(x-1) \leqslant \varphi'_g(x) \leqslant \varphi'_d(x) \leqslant \varphi(x+1) - \varphi(x).$$

7. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\varphi'_d(x) - \varphi'_g(x)\right] = 0$.

8. Déduire des questions précédentes que φ est dérivable sur $]-1, +\infty[$.

Partie III : Une suite de fonctions

Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n et S_n les fonctions définies pour tout $x \in I$ par

$$u_n(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right),$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

9. Montrer que la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge. La limite sera notée $S(x)$.

10. Montrer que pour tout entier naturel non nul n et pour tout $x \in I$,

$$S_n(x) = \ln(n!) + x\ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(x+k).$$

11. En déduire que pour tout entier naturel non nul n, la fonction S_n est convexe.

12. En déduire que S est convexe.

13. Montrer que $S \in \mathscr{F}$.

Partie IV : Caractérisation de $\mathscr{F}$

14. Montrer que la suite $(S(x+n) - x\ln(n+1) - \ln(n!))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers 0.

15. Soit f une fonction définie sur I par

$$\begin{cases} f(x+1) = f(x) + \ln(x+1) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} f(x+n) - x\ln(n+1) - \ln(n!) = 0 \end{cases}$$

a) Exprimer $f(x+n)$ en fonction de $f(x)$.

b) En déduire que $f = S$.

16. Soit f une fonction définie sur I par

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x+1) = f(x) + \ln(x+1) \\ f \text{ est convexe} \end{cases}$$

On pose $d = f - S$.

a) Montrer que d est 1-périodique.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [n, n+1]$,

$$\begin{aligned} f'(n) \leqslant f'(x) \leqslant f'(n+1) = f'(n) + \tfrac{1}{n+1}, \\ S'(n) \leqslant S'(x) \leqslant S'(n+1) = S'(n) + \tfrac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [n, n+1]$,

$$d'(n) - \frac{1}{n+1} \leqslant d'(x) \leqslant d'(n) + \frac{1}{n+1}.$$

d) En déduire que $f = S$.