■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la présentation et à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

■ ■ ■

L'exercice et les deux problèmes sont **indépendants**.

Exercice 1. (Deux petits calculs)

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 de $\sqrt{1+\cos x}$.

2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 3^{2014} par 7.

Problème. (Résolution d'une équation différentielle) Dans tout le problème, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sin x}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel et $I_n = [n\pi, (n+1)\pi]$.

Partie I : Allure du graphe de f

1. Montrer que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

2 . a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul, l'équation $x\cos x = \sin x$ possède une unique solution dans l'intervalle I_n. Cette solution sera notée x_n.

b) Déterminer un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

3. On suppose dans cette question que n est non nul. Déterminer les variations de f sur l'intervalle I_0, puis sur les intervalles I_{2n-1} et I_{2n}.

4. Donner l'allure du graphe de f.

Partie II : Isomorphisme

On considère l'application Φ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui même définie par

$$\forall\ P \in \mathbb{R}[X],\ \Phi(P) = P + P''.$$

5. Montrer que Φ est un endormorphisme du groupe $(\mathbb{R}[X], +)$ et que

$$\forall\ (\lambda, P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}[X],\ \Phi(\lambda P) = \lambda\Phi(P).$$

6. Montrer que Φ est injectif.

7 . a) Montrer que tout polynôme constant admet un antécédent par Φ.

b) Soit P un polynôme de degré $n+1$. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $P - \Phi(Q)$ appartienne à $\mathbb{R}_n[X]$.

c) En déduire que Φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Partie III : La fonction sinus et les polynômes

8. Exprimer $\sin^{(n+2)}$ en fonction de $\sin^{(n)}$.

9. Soient U et V des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ U(x)\sin x + V(x)\cos x = 0.$$

Montrer que U et V sont nuls.

Partie IV : Une suite de polynômes

On note g la restriction de f à $]0, +\infty[$.

10 . a) Montrer qu'il existe deux suites de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall\ x \in \mathbb{R}_+^\star,\ g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)\sin^{(n)}(x) + Q_n(x)\sin^{(n+1)}(x)}{x^{n+1}}.$$

b) Montrer que ces deux suites sont uniques.

c) Déterminer les expressions de P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n et Q_n.

d) Déterminer P_i et Q_i pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$.

11. Déterminer la parité, le degré et le terme de plus haut degré de P_n et de Q_n.

12 . a) En écrivant que, pour tout $x > 0$, $xg(x) = \sin x$, donner une expression de $\sin^{(n+1)}$ en fonction des dérivées de g.

b) En déduire d'autres relations reliant P_n, Q_n, P_{n+1} et Q_{n+1}.

13 . a) Montrer que $P_n' = Q_n$.

b) Montrer que $P_n + P_n'' = X^n$.

14. Montrer que P_n est l'unique solution de l'équation $\Phi(Q) = X^n$.

15. On note $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$. À l'aide de la relation $\Phi(P_n) = X^n$, déterminer les valeurs des coefficients de P.

L'expression fera intervenir des factorielles et / ou des puissances, mais pas de signe $\prod$.

16. Déterminer les solutions réelles de l'équation différentielle $y'' + y = x^n$.

Problème. (Autour de la somme des diviseurs d'un entier naturel) Les deux parties de ce problème sont **indépendantes**.

Pour tout entier naturel non nul n, on note $\mathscr{D}(n)$ l'ensemble des entiers naturels diviseurs de n et $\sigma(n)$ la somme de ses diviseurs, i.e.

$$\sigma(n) = \sum_{k \in \mathscr{D}(n)} k = \sum_{k|n} k.$$

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Partie I : Une majoration.

1. Montrer que $\sigma(n) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k}$.

2. En déduire que $\sigma(n) \leqslant n(1 + \ln n)$.

Partie II : Une équation

Pour tout entier naturel q, on note $f(q) = \sup\{n \in \mathbb{N}^\star \ ; \ \sigma(n) \leqslant q\}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on note $\mathscr{E}_k$ l'ensemble des solutions de l'équation $q - f(q) = k$.

3. Premières constatations.

a) Déterminer $f(1)$.

b) Pour tout entier naturel p non nul, montrer que $f(p)$ est bien défini.

4. Montrer que pour tout entier naturel p premier, $p + 1 \in \mathscr{E}_1$.

Soit $k \geqslant 2$. On souhaite montrer que $\mathscr{E}_k$ est infini. On désigne par $\mathscr{P}_+$ l'ensemble des entiers naturels premiers. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \max\{p \in \mathscr{P}_+ \ ; \ p \leqslant n! - (k+1)\}$.

5. Montrer qu'il existe un rang n_0 à partir duquel p_n est bien défini.

6. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n \geqslant n_0}$.

7. Soit $m \in [\![1, k-1]\!]$ et $n > k$.

a) Si $p_n + m \leqslant n! - (k+1)$, montrer que $p_n + m$ n'est pas premier.

b) Si $p_n + m \geqslant n! - k$, montrer qu'il existe $i \in [\![2, k]\!]$ tel que $p_n + m = n! - i$. En déduire que $p_n + m$ n'est pas premier.

8. Déterminer $f(p_n + k)$.

9. Conclure.