■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la présentation et à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

■ ■ ■

Les trois exercices sont **indépendants**.

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de $\mathscr{L}(E)$. On note $q = \mathrm{Id}_E - p$.

1. Montrer que q est un projecteur dont on déterminera l'image et le noyau en fonction de ceux de p.
On définit les parties F et G de $\mathscr{L}(E)$ par

$$F = \{f \in \mathscr{L}(E) \; ; \; \exists\, u \in \mathscr{L}(E) \; ; \; f = u \circ p\},$$
$$G = \{f \in \mathscr{L}(E) \; ; \; \exists\, u \in \mathscr{L}(E) \; ; \; f = u \circ q\}.$$

2. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{L}(E)$.

3. Montrer que $\mathscr{L}(E) = F \oplus G$.

Exercice 2. (Théorème de Fermat pour des polynômes) Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathscr{A}$ l'ensemble des racines complexes de P. On définit le radical de P par $N(P) = 1$ si $\deg P = 0$ et $N(P) = \prod_{a \in \mathscr{A}} (X - a)$ sinon. Soit $r(P)$ le nombre de racines distinctes complexes de P. On considère trois polynômes P, Q, R de $\mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que $r(P) = \deg N(P)$ et $r(PQR) \leqslant \deg P + \deg Q + \deg R$.

On cherche dans un premier temps à démontrer le théorème de Mason : Soient P, Q, R sont trois polynômes premiers entre eux dans leur ensemble dans $\mathbb{C}[X]$ et non constants tels que $P + Q + R = 0$. On souhaite montrer que

$$\max\{\deg P,\, \deg Q,\, \deg R\} \leqslant r(PQR) - 1.$$

2. Soient P, Q, R trois polynômes premiers entre eux dans leur ensemble dans $\mathbb{C}[X]$, non constants et tels que $P + Q + R = 0$.

a) Montrer que P, Q, R peuvent s'écrire

$$P = \lambda \prod_{1 \leqslant i \leqslant p} (X - \alpha_i)^{\ell_i},$$
$$Q = \mu \prod_{1 \leqslant i \leqslant q} (X - \beta_i)^{m_i},$$
$$R = \nu \prod_{1 \leqslant i \leqslant r} (X - \gamma_i)^{n_i},$$

où les α_i, β_i et γ_i sont des nombres complexes distincts deux à deux. Exprimer p en fonction de $r(P)$.

b) Soit $\Delta = PQ' - P'Q$. Montrer que Δ est non nul et que

$$\begin{aligned}\Delta &= R'Q - RQ' \\ &= P'R - PR'.\end{aligned}$$

c) Montrer que $\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)^{\ell_i - 1}$ divise Δ.

d) Montrer que

$$(\deg P - p) + (\deg Q - q) + (\deg R - r) \leqslant \deg P + \deg Q - 1.$$

e) En déduire que $\deg R \leqslant r(PQR) - 1$, puis le théorème de Mason.

3. En déduire le théorème de Liouville (Fermat pour les polynômes) : pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation $P^n + Q^n = R^n$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{C}[X]$ avec P, Q, R non constants et premiers entre eux.

Problème. (Commutant & Géométrie) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 2$. Pour tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, le *commutant* de f est l'ensemble

$$\mathscr{C}(f) = \{g \in \mathscr{L}(E)\ ;\ g \circ f = f \circ g\}.$$

1. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

a) Montrer que $(\mathscr{C}(f), +, \cdot)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

b) Montrer que $(\mathscr{C}(f), +, \circ)$ est un anneau.

c) Montrer que pour tout $(g, \lambda) \in \mathscr{C}(f) \times \mathbb{C}$,

$$g\left(\operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id})\right) \subset \operatorname{Ker}\left(f - \lambda \operatorname{Id}\right).$$

d) Donner un contre-exemple à la réciproque de la question précédente.

2. Déterminer le commutant d'une homothétie.

3. Soit s une symétrie.

a) Montrer que $g \in \mathscr{C}(s)$ si et seulement si

$$g(\operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id})) \subset \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}) \text{ et } g(\operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id})) \subset \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}).$$

b) En déduire $\dim \mathscr{C}(s)$ en fonction de $\dim \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id})$ et de $\dim \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id})$.

4. Soient F un sous-espace vectoriel de E et s une symétrie. Montrer que F est stable par s si et seulement si $F = (F \cap \operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id})) \oplus (F \cap \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}))$.

5. Soient s et s' deux symétries qui commutent.

a) Montrer qu'il existe des sous-espaces vectoriels F_1, F_2, F_3 et F_4 de E tels que

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(s - \operatorname{Id}) &= F_1 \oplus F_2, \\ \operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id}) &= F_3 \oplus F_4, \\ \operatorname{Ker}(s' - \operatorname{Id}) &= F_1 \oplus F_3, \\ \operatorname{Ker}(s' + \operatorname{Id}) &= F_2 \oplus F_4.\end{aligned}$$

b) Montrer que $g \in \mathscr{C}(s) \cap \mathscr{C}(s')$ si et seulement si g laisse stables les quatre sous-espaces F_1, F_2, F_3 et F_4.

6. Déterminer les endomorphismes qui commutent avec toutes les symétries.