



L'usage des calculatrices est interdit.

Un grand soin devra être apporté à la présentation et à la rédaction.

Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.



Exercice 1. (Entre divergence & convergence) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs telle que $\sum a_n$ diverge.

1. On suppose que la suite (a_n) est à valeurs strictement positives. Montrer que $\sum \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$ converge.

2. Comportement de $\sum \frac{a_n}{1+n a_n}$.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \frac{1}{n}$. Déterminer la nature de $\sum \frac{a_n}{1+n a_n}$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = 1$ s'il existe un entier m tel que $n = 2^m - 1$ et 0 sinon. Déterminer la nature de $\sum \frac{a_n}{1+n a_n}$.

Problème. (Réorganisation des termes d'une série semi-convergente) Soit x un réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. On propose de construire une bijection s de \mathbb{N}^* dans \mathbb{N}^* telle

que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{s(n)} = x$. On définit simultanément par récurrence les suites d'entiers naturels $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et une suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels par

- $p_0 = q_0 = S_0 = 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $S_n > x$, alors

$$q_{n+1} = 1 + q_n, p_{n+1} = p_n, s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1.$$

Sinon,

$$q_{n+1} = q_n, p_{n+1} = 1 + p_n, s_{n+1} = 2p_{n+1}.$$

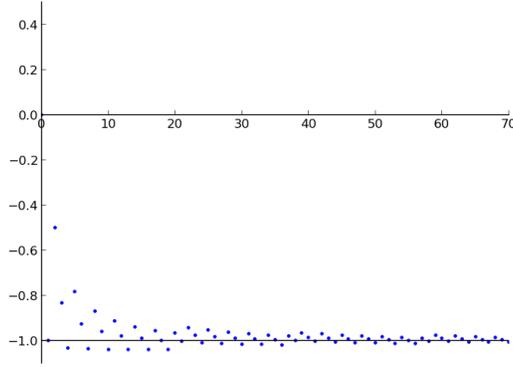
Dans les deux cas, $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}$.

Partie I : Préliminaires

1. Algorithmique.

a) Écrire une fonction `suite`, en langage Python, qui prend en argument x et l'entier n et qui renvoie le couple de listes : $([s_1, \dots, s_n], [S_0, \dots, S_n])$.

b) En utilisant la fonction précédente, pour $x = -1$ et $n = 70$, et en traçant les points de coordonnées $(n, S_n)_{n \geq 0}$, on obtient le résultat graphique suivant.



Que constate-t-on pour la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$? Expliquer le principe de l'algorithme.

2. On pose dorénavant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s(n) = s_n$. Prouver que, pour tout $n \geq 1$,

1. $\{s(1), \dots, s(n)\} = \{2, 4, \dots, 2p_n\} \cup \{1, 3, \dots, 2q_n - 1\}$.

2. $p_n + q_n = n$.

3. $S_n = \sum_{k=1}^n u_{s(k)}$.

3. Démontrer qu'une suite d'entiers convergente est constante à partir d'un certain rang.

Partie II : Bijection

4. On se propose de démontrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croît vers $+\infty$.

a) On suppose dans un premier temps que cette suite est majorée. Utiliser la question précédente pour démontrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,

$$S_n > x \text{ et } S_n = S_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1}.$$

En déduire une contradiction.

b) Déduire du raisonnement précédent que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

5. Justifier rapidement que $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

6. Déduire de ce qui précède que s est une bijection de \mathbb{N}^* dans lui-même.

Partie III : Convergence

7. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$|S_{n+1} - x| \leq |S_n - x| \text{ ou } |S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|.$$

8. En déduire que pour tout naturel N , il existe un entier $n > N$ tel que

$$|S_{n+1} - x| \leq |u_{s(n+1)}|.$$

9. Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $p_n \geq 1$ et $q_n \geq 1$.

10. Soit $n \geq n_0$. On note $v_n = \max\{|S_n - x|, |u_{2p_{n+1}}|, |u_{2q_{n+1}-1}|\}$. Montrer que $(v_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge vers 0.

11. Démontrer que (S_n) converge vers x et conclure.

Partie IV : Complément

12. Démontrer l'existence d'une constante $\gamma > 0$ telle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ quand $n \rightarrow +\infty$.

13. Donner un développement analogue pour $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}}$ en fonction de γ .

14. a) Justifier, pour tout entier naturel n tel que $p_n \geq 1$ et $q_n \geq 1$, l'égalité

$$S_n = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2^{k-1}}.$$

b) En déduire que

$$S_n = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p_n}{n - p_n} \right) - \ln 2 + o(1).$$

c) En déduire un équivalent simple de p_n et de q_n .

d) Déterminer la limite de

$$\frac{\sum_{k=1}^n |u_{s(k)}|}{\sum_{k=1}^n |u_k|}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.