■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la présentation et à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

■ ■ ■

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille n et $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées complexes de taille n. On note ${}^tA$ la matrice transposée d'une matrice A et $\det(A)$ son déterminant. Si M et N sont deux matrices appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on rappelle que M et N sont semblables s'il existe une matrice inversible Q appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = QNQ^{-1}$.

Partie I : Questions préliminaires

1. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases de E. On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Soit f un endomorphisme de E, A sa matrice sur $\mathscr{B}$ et B sa matrice sur $\mathscr{B}'$. Exprimer, sans démonstration, A en fonction de B, de P et de P^{-1}.

2. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ semblables. Montrer que ${}^tA$ et ${}^tB$ sont semblables.

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *diagonalisable* s'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ sur laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A soit diagonale.

3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que si A est diagonale, alors A et ${}^tA$ sont semblables.

b) Montrer que si A est diagonalisable, alors A et ${}^tA$ sont semblables.

Le but du problème est de montrer que toute matrice A appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à sa transposée.

Partie II : Cas $n = 2$

Dans cette partie, on fixe une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale qu'on écrit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On cherche à résoudre l'équation

$$ {}^tAP = PA \tag{1}$$

où l'inconnue P est une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qu'on cherchera sous la forme $P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

4. Trouver un ensemble de conditions portant sur x, y, z et t qui soit nécessaire et suffisant pour que P vérifie l'équation (1).

On ramènera cet ensemble à deux conditions, l'une étant $y = z$ et l'autre ne portant que sur x, y et t.

5. En prenant l'un des deux nombres x ou t nul, trouver deux matrices P solutions.

6. Montrer que A et ${}^tA$ sont semblables.

Dans la suite du problème, n est un entier quelconque supérieur ou égal à 2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont A est la matrice sur la base canonique.

On admettra le résultat suivant. Soit α une valeur propre de f, i.e. il existe $u \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que $f(u) = \alpha u$. On peut trouver une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ et un entier k entre 0 et $n-1$ ayant les propriétés suivantes :

- La matrice $T = (t_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de f sur $\mathscr{B}$ est triangulaire supérieure.
- Les k premiers termes diagonaux sont tous différents de α et les n $n-k$ derniers sont tous égaux à α.

On pose $g = f - \alpha\,\mathrm{Id}$, où Id désigne l'identité de $\mathbb{C}^n$.

Partie III : Le cas $k = 0$

Dans cette partie, on suppose que $k = 0$ et les termes diagonaux de T sont donc tous égaux à α.

7 . a) Montrer que pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $g(e_i)$ appartient au sous-espace engendré par $e_1, \ldots, e_{i-1}$.

b) En déduire que l'endomorphisme g^n est nul (g^m désigne l'endomorphisme $g \circ \cdots \circ g$ où g est utilisé m fois).

Dans toute la suite de cette partie, on désigne par p le plus petit entier supérieur ou égal à 1 tel que g^p soit nul.

8. Montrer que si $p = 1$, alors A est semblable à ${}^tA$.

On supposera dans la suite de cette partie que $p \neq 1$. Soit u un vecteur tel que $g^{p-1}(u) \neq 0$ et $u_p = u$, $u_{p-1} = g(u), \ldots, u_1 = g^{p-1}(u)$.

9. Montrer que $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre.

10. On suppose dans cette question que $p = n$.

a) Déterminer la matrice M de f sur la base $\mathscr{C} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ puis la matrice M' de f sur la base $\mathscr{C}' = (u_n, u_{n-1}, \ldots, u_1)$ de $\mathbb{C}^n$.

b) Montrer que A est semblable à ${}^tA$.

11. Dans cette question, on suppose que $p < n$ et on complète $(u_1, \ldots, u_p)$ en une base $(u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{C}^n$. On note U la matrice de g sur cette base et P la matrice carrée dont la k-ème ligne est égale à la première ligne de U^{k-1}.

a) Déterminer les lignes d'indices i de cette matrice P pour $i \geqslant p+1$. Que peut-on en conclure concernant le rang de P ?

b) Pour j et k entre 1 et p, préciser $g^{k-1}(u_j)$ suivant que $k < j$, $k = j$ ou $k > j$. En déduire les p premiers termes de la k-ème ligne de P.

c) Montrer que la matrice P est de rang p.

Soit h l'endomorphisme admettant P pour matrice dans la base $(u_1, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{C}^n$ et W le sous-espace engendré par $(u_1, \ldots, u_p)$.

d) Montrer que pour tout $v \in W$, $h(v) = v$.

e) En déduire que W et le noyau de h sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{C}^n$.

f) Montrer que ces deux sous-espaces sont stables par g et par f.

Partie IV : Le cas général

Dans cette partie, k n'est plus supposé nul.

12. Justifier que la matrice de g sur la base $\mathscr{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} T_1 & B \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}$, où les matrices T_1 et T_2 sont triangulaires supérieures de tailles respectives k et $n-k$. Montrer que la matrice T_2^{n-k} est nulle et que la matrice T_1 est inversible.

13. On admet que la matrice de g^{n-k} sur la base $\mathscr{B}$ est de la forme $\begin{pmatrix} T_1^{n-k} & B' \\ 0 & T_2^{n-k} \end{pmatrix}$. Quel est le rang de cette matrice ? Quelle est la dimension du noyau G de g^{n-k} ?

14. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ engendré par $(e_1, \ldots, e_k)$.

a) Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^n$.

b) Montrer que F et G sont stables par g et f.

Partie V : Conclusion

15. On suppose par récurrence que toute matrice carrée complexe de taille comprise entre 1 et $n-1$ est semblable à sa transposée. On suppose dans cette question qu'il existe deux sous-espaces F et G supplémentaires dans $\mathbb{C}^n$ et stables par f, aucun de ces deux sous-espaces n'étant réduit au vecteur nul. En considérant les restrictions de f à F et à G, montrer que A est semblable à ${}^tA$.

16. En rassemblant les résultats, montrer que, dans tous les cas, A est semblable, dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, à ${}^tA$.

17. Soient P_1, P_2 deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et g l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $g(z) = \det(P_1 + zP_2)$. On suppose que $g(i) \neq 0$.

a) Montrer que g est une fonction polynomiale.

b) En déduire qu'il existe un réel x tel que $g(x) \neq 0$.

18. Montrer que si deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, alors elles sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui montre que toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à sa transposée.