Devoir Surveillé

4h

■ ■ ■

L'usage des calculatrices est interdit.
Un grand soin devra être apporté à la présentation et à la rédaction.
Si vous constatez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous serez amenés à prendre.

■ ■ ■

Exercice 1. (Fonction indicatrice d'Euler) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. L'ensemble $\Omega = [\![1, n]\!]$ est muni de la tribu grossière $\mathscr{P}(\Omega)$ et la probabilité uniforme $\mathbb{P}$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note A_k l'ensemble des entiers de Ω divisibles par k.

1. Montrer que si $k|n$, alors $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{k}$.

2. Soient $k_1, \ldots, k_r$ des diviseurs de n deux à deux premiers entre eux. Montrer que les événements $A_{k_1}, \ldots, A_{k_r}$ sont mutuellement indépendants.

On note $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des nombres premiers divisant n.

3. Montrer que la probabilité qu'un élément de Ω soit premier avec n vaut

$$\prod_{p \in \mathscr{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

La fonction $\varphi \ : \ n \mapsto n \cdot \prod\limits_{p \in \mathscr{P}_n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ est la fonction indicatrice d'Euler.

4. Soit d un diviseur de n tel que $n = kd$. On note $B_d = \{j \cdot d,\ j \in [\![1, k]\!] \ ; \ j \wedge k = 1\}$. Déterminer le cardinal de B_d.

5. En déduire que $\sum\limits_{d|n} \varphi(d) = n$.

Problème. (Processus de Galton-Watson) L'objectif du problème est l'étude de l'efficacité d'un traitement T destiné à éradiquer une population de cellules indésirables. Pour tester T, on agit comme suit :

1. On prélève une cellule unique C_0 à laquelle on applique T, ce qui a pour effet de partager C_0 en un nombre naturel aléatoire Z_1 de cellule(s) identique(s) à C_0 qu'on appellera enfant(s) de C_0 ou descendant(s) de première génération de C_0 lorsque $Z_1 > 0$. Si $Z_1 = 0$ (ce que l'on souhaite), le traitement est terminé.
2. Lorsque C_0 a k enfant(s) avec $k \geqslant 1$, on leur applique à chacun le traitement T et leur comportement sera le même que celui de C_0 et ceci indépendemment les uns des autres lorsque $k > 1$.
3. À l'issue de cette deuxième étape, on obtiendra un nombre naturel aléatoire Z_2 de descendant(s) de deuxième génération. Si $Z_2 = 0$, on s'arrête. Sinon, on poursuit dans les mêmes coniditions et, pour $n \geqslant 1$, on notera Z_n le nombre de descendants de n-ième génération tant que $Z_n > 0$.

Hypothèses & Mises en équation. On dispose d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ dont on ne précisera pas les caractéristiques. On supposera que $Z_0 = 1$. Pour tout entier naturel k, on notera $p_k = \mathbb{P}(Z_1 = k)$ (ce réel représente donc la probabilité, pour une cellule quelconque, d'avoir k

enfants). On supposera qu'il existe un entier naturel K non nul tel que $p_K \neq 0$ et pour tout $k > K$, $p_k = 0$. Bien entendu, $\sum_{k=0}^{K} p_k = 1$.

1. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que l'ensemble des valeurs que peut prendre Z_n est $Z_n(\Omega) \subset [\![0, K^n]\!]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(X_{k,n})_{k \in [\![1,K^n]\!]}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi que Z_1. $X_{k,n}$ représente le nombre d'enfants qu'aura la k-ème cellule de la n-ème génération. Alors, d'après la description précédente, si $Z_n > 0$, alors $Z_{n+1} = \sum_{k=0}^{Z_n} X_{k,n}$. Sinon, $Z_{n+1} = 0$.

2. Montrer que, s'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $Z_n = 0$, alors pour tout entier $k \geqslant 0$, $Z_{n+k} = 0$.

On notera, pour tout entier naturel n, $u_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$. Lorsque $\lim u_n = 1$, T est dit efficace.
Remarque. Les cellules de la $(n+1)$ème génération de C_0 sont celles de la n-ème génération de l'ensemble des enfants de C_0. Ceci se formalise comme suit. Soit $n \in [\![1, n]\!]$.

3. Cas triviaux.

a) Décrire la suite (Z_n) lorsque $p_0 = 1$.

b) Que se passe-t-il lorsque $p_0 = 0$.

On supposera dans la suite que $p_0 \in]0, 1[$.

Partie I : Un premier exemple

On suppose dans cette partie que la loi de Z_1 est définie par $p_0 > 0$, $p_1 > 0$ et $p_0 + p_1 = 1$.

4. Calculer u_0 et u_1. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $Z_n \in \{0, 1\}$.

5. Soit n un entier naturel.

a) Montrer que

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0 | Z_1 = 0) p_0 + \mathbb{P}(Z_{n+1} = 0 | Z_1 = 1) p_1.$$

b) Montrer que $\mathbb{P}(Z_{n+1} = 0 | Z_1 = 1) = u_n$.

c) En déduire que $u_{n+1} = p_0 + p_1 u_n$.

6. En déduire la valeur de u_n en fonction de p_0, p_1 et n. Le traitement est-il efficace ?

Partie II : Un deuxième exemple

On suppose dans cette partie que la loi de Z_1 est définie par p_0, p_1, p_2 tels que $p_0 > 0$, $p_2 > 0$ et $p_0 + p_1 + p_2 = 1$.

7. Montrer que pour tout $k \in [\![0, 2]\!]$, $\mathbb{P}(Z_{n+1} = 0 | Z_1 = k) = u_n^k$.
On pourra décomposer les individus de la génération $n+1$ en fonction de leur ancêtre de la génération 1.

8. En déduire que $\mathbb{P}(Z_{n+1} = 0) = p_0 + p_1 u_n + p_2 u_n^2$.

On note f la fonction définie pour tout réel $x \in [0, 1]$ par $f(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2$.

9 . a) Déterminer les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$ puis le signe de f, f' et f'' (soyez précis quant aux inégalités strictes et larges).

b) Représenter le graphe de f dans les trois cas suivants : $f'(1) < 1$, $f'(1) = 1$ et $f'(1) > 1$ en choisissant, dans chacun de ces cas, des valeurs simples de p_0, p_1 et p_2.

10. On note Δ la première bissectrice, d'équation cartésienne $y = x$.

a) Montrer que, lorsque $f'(1) \leqslant 1$, le graphe de f se trouve au-dessus Δ.

b) Lorsque $f'(1) = 1$, montrer que le graphe de f est tangent à Δ au point de coordonnées $(1, 1)$.

c) Lorsque $f'(1) > 1$, montrer que le graphe de f recoupe Δ au point d'abscisse p_0/p_2.

11. Montrer que la suite de terme général u_n est strictement croissante et majorée par $\min\{p_0/p_2, 1\}$.

12. En déduire la limite de (u_n) dans les différents cas envisagés. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le traitement soit efficace.

Dans la suite, on cherche à préciser la convergence de la suite (u_n).

13. Dans le cas où $f'(1) < 1$, montrer que pour tout entier naturel n, $1-u_{n+1} \leqslant (1-u_0)[f'(1)]^{n+1}$.

14. On suppose que $f'(1) = 1$. Soit n un entier naturel.

a) Montrer que $\frac{1}{1-u_{n+1}} - \frac{1}{1-u_n} = \frac{p_0}{p_1+p_0(1+u_n)} \leqslant 1$.

b) En déduire que $1 - u_n \geqslant \frac{1}{n+1}$.

Partie III : Généralisation partielle

On suppose qu'il existe un entier naturel k supérieur ou égal à 2 tel que $p_k > 0$ et $\sum_{j=0}^{k} p_j = 1$. On notera $m = \mathbb{E}[Z_1]$. Pour tout réel $s \in [0, 1]$, on note $g_n(s) = \mathbb{E}\left[s^{Z_n}\right]$ et $g(s) = \mathbb{E}\left[s^{Z_1}\right]$. Enfin, $g^{(n)}$ désignera l'itérée n-ème de g, i.e. $g^{(n)} = \underbrace{g \circ \cdots \circ g}_{n \text{ fois}}$.

15. Propriétés de g.

a) Exprimer $g(0)$ et $g(1)$ en fonction de $p_0, \ldots, p_k$.

b) Exprimer $g'(1)$ en fonction de m.

c) Montrer que $g'' > 0$.

d) Exprimer $g_n(0)$ en fonction de u_n.

16. Probabilité d'extinction.

a) Montrer que $g_n = g^{(n)}$.

On pourra décomposer en fonction des valeurs que peut prendre Z_n.

b) Montrer que la suite $(g_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel q.

On admettra que $q = \mathbb{P}(\exists\, n \in \mathbb{N}\ ;\ Z_n = 0)$.

Si vous avez du temps, montrez ce résultat...

17. On veut montrer que g admet au plus un point fixe dans $]0, 1[$. Pour cela, on suppose que g admet deux points fixes dans $]0, 1[$ que nous noterons q_1 et q_2.

a) Montrer qu'il existe deux réels distincts ξ_1, $\xi_2 \in]0, 1[$ tels que $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 1$.

b) Conclure.

18. Le cas $m \leqslant 1$. Soit f la fonction définie pour tout $s \in [0, 1]$ par $h(s) = g(s) - s$.

a) Montrer que la fonction h est strictement décroissante.

b) En déduire que pour tout $s \in [0, 1[$, $g(s) > s$.

c) En déduire que $q = 1$.

19. Le cas $m > 1$.

a) Montrer qu'il existe un réel $s_0 \in [0, 1[$ tel que pour tout $s \in]s_0, 1[$, $g(s) < s$.

b) En déduire que $q < 1$.

20. Le cas $m = 1$. On définit sur $[0, 1[$ la fonction b par $\frac{1}{1-g(s)} = \frac{1}{1-s} + b(s)$.

a) Calculer $\lim_{s\to 1} b(s)$.

b) Déterminer un équivalent de $1 - g_n(0)$.