Devoir à la Maison

Réorganisation des termes d'une série semi-convergente

à rendre le 04 mai 2015

■ ■ ■

Soit x un réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. On propose de construire une bijection s de $\mathbb{N}^\star$ dans $\mathbb{N}^\star$ telle que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{s(n)} = x$. On définit simultanément par récurrence les suites d'entiers naturels $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et une suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels par

* $p_0 = q_0 = S_0 = 0$.
* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $S_n > x$, alors

$$q_{n+1} = 1 + q_n,\ p_{n+1} = p_n,\ s_{n+1} = 2q_{n+1} - 1.$$

Sinon,

$$q_{n+1} = q_n,\ p_{n+1} = 1 + p_n,\ s_{n+1} = 2p_{n+1}.$$

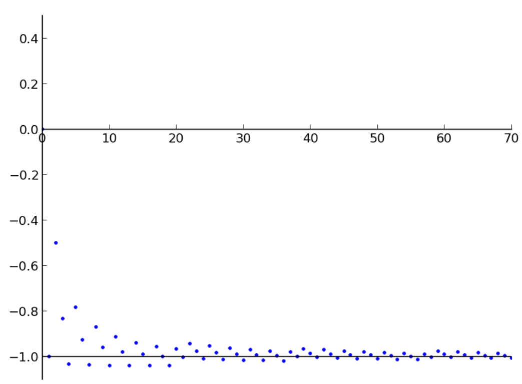
Dans les deux cas, $S_{n+1} = S_n + u_{s_{n+1}}$.

Partie I : Préliminaires

1. Algorithmique.

a) Écrire une fonction `suite`, en langage `Python`, qui prend en argument x et l'entier n et qui renvoie le couple de listes : `(`$[s_1,\cdots,s_n]$`, `$[S_0,\cdots,S_n]$`)`.

b) En utilisant la fonction précédente, pour $x = -1$ et $n = 70$, et en traçant les points de coordonnées $(n, S_n)_{n\geqslant 0}$, on obtient le résultat graphique suivant.



Que constate-t-on pour la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Expliquer le principe de l'algorithme.

2. On pose dorénavant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s(n) = s_n$. Prouver que, pour tout $n \geqslant 1$,

(i). $\{s(1),\ldots,s(n)\} = \{2,4,\ldots,2p_n\} \cup \{1,3,\ldots,2q_n-1\}$.

(ii). $p_n + q_n = n$.

(iii). $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_{s(k)}$.

3. Démontrer qu'une suite d'entiers convergente est constante à partir d'un certain rang.

Partie II : Bijection

4. On se propose de démontrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît vers $+\infty$.

a) On suppose dans un premier temps que cette suite est majorée. Utiliser la question précédente pour démontrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$,

$$S_n > x \text{ et } S_n = S_{n_0} - \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{2q_{n_0} + 2k - 2n_0 + 1}.$$

En déduire une contradiction.

b) Déduire du raisonnement précédent que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

5. Justifier rapidement que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

6. Déduire de ce qui précède que s est une bijection de $\mathbb{N}^\star$ dans lui-même.

Partie III : Convergence

7. Démontrer que, pour tout $n \geqslant 0$,

$$|S_{n+1} - x| \leqslant |S_n - x| \text{ ou } |S_{n+1} - x| \leqslant |u_{s(n+1)}|.$$

8. En déduire que pour tout naturel N, il existe un entier $n > N$ tel que

$$|S_{n+1} - x| \leqslant |u_{s(n+1)}|.$$

9. Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $p_n \geqslant 1$ et $q_n \geqslant 1$.

10. Soit $n \geqslant n_0$. On note $v_n = \max\{|S_n - x|, |u_{2p_{n+1}}|, |u_{2q_{n+1}-1}|\}$. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge vers 0.

11. Démontrer que (S_n) converge vers x et conclure.

Partie IV : Complément

12. Démontrer l'existence d'une constante $\gamma > 0$ telle que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ quand $n \to +\infty$.

13. Donner un développement analogue pour $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$ en fonction de γ.

14 . a) Justifier, pour tout entier naturel n tel que $p_n \geqslant 1$ et $q_n \geqslant 1$, l'égalité

$$S_n = \sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{q_n} \frac{1}{2k-1}.$$

b) En déduire que

$$S_n = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p_n}{n - p_n}\right) - \ln 2 + o(1).$$

c) En déduire un équivalent simple de p_n et de q_n.

d) Déterminer la limite de

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} |u_{s(k)}|}{\sum\limits_{k=1}^{n} |u_k|}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.